

Part A : Vocabulary

- ۱- گزینه ۳ صحیح می‌باشد
به معنی نیاز ضروری
- ۲- گزینه ۲ صحیح می‌باشد
به معنی ثروتمند
- ۳- گزینه ۴ صحیح می‌باشد
به معنی هم‌رأی و هم دل
- ۴- گزینه ۳ صحیح می‌باشد
به معنی همه فن حریف
- ۵- گزینه ۱ صحیح می‌باشد
به معنی قریب‌الوقوع
- ۶- گزینه ۴ صحیح می‌باشد
به معنی «جادار»
- ۷- گزینه ۱ صحیح می‌باشد
به معنی فرمانبردار و رام
- ۸- گزینه ۲ صحیح می‌باشد
به معنی آگاه و مطلع

Part B: Structure

- ۹- گزینه ۲ صحیح می‌باشد
- ۱۰- گزینه ۱ صحیح می‌باشد
وجه التزامی ← subjunctive
- ۱۱- گزینه ۴ صحیح می‌باشد
- ۱۲- گزینه ۴ صحیح می‌باشد
وجه التزامی ← subjunctive
- ۱۳- گزینه ۳ صحیح می‌باشد
- ۱۴- گزینه ۴ صحیح می‌باشد
- ۱۵- گزینه ۳ صحیح می‌باشد
- ۱۶- گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

الف- ترجمه صورت سؤال: چرا اتصالات تیر به ستون ظرفیت باربری محدود دارند؟

ب- بررسی گزینه صحیح:

- ب-۱- ترجمه گزینه سوم: زیرا آن‌ها از مصالحی ساخته شده‌اند که خود دارای مقاومت محدود می‌باشند.
- ب-۲- علت انتخاب گزینه: این عبارت عیناً در متن موجود می‌باشد.

ج- بررسی گزینه‌های نادرست:

ج-۱- گزینه ۱ نادرست است: زیرا اشاره به عدم اجرای مناسب سازه دارد در حالی که ظرفیت باربری محدود، ربطی به اجرای نامناسب ندارد
 ج-۲- گزینه ۲ نادرست است: این گزینه اشاره به عدم طراحی مناسب سازه دارد در حالی که این مطلب نیز مانند عدم اجرای منسب ارتباطی با محدود بودن ظرفیت باربری ندارد و صرفاً می‌تواند سبب خرابی شود.
 ج-۳- گزینه ۴ نادرست است: گزینه چهارم بیان می‌دارد که چون بتون با فولاد مسلح نشده است بنابراین ظرفیت باربری اتصالات محدود است در حالی که اگر بتون با فولاد نیز مسلح می‌شد باز هم اتصالات ظرفیت محدودی داشتند، ضمن آن که در متن گفته نشده که در این سیستم سازه‌ای، از بتون ساده (غیرمسلح) استفاده می‌شود.

۱۷ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد

الف- ترجمه صورت سؤال: کدام یک از عبارات زیر صحیح نمی‌باشد؟

ب- بررسی گزینه صحیح:

ب-۱- ترجمه گزینه دوم: هنگامی که نیروهایی بزرگتر از ظرفیت مقاومتی مصالح به اتصالات اعمال می‌شود، آن‌ها به‌طور جدی آسیب می‌بینند
 ب-۲- علت انتخاب این گزینه: در متن آمده است که ظرفیت (مقاومت) محدود مصالح سبب محدود شدن ظرفیت باربری اتصال می‌شود و صراحتاً اشاره شده است که این محدودیت (محدودیت دوم) باعث آسیب دیدن آن‌ها می‌شود، بنابراین مطلب فوق نادرست می‌باشد برای مثال ظرفیت باربری اتصال را می‌توان با تمهیداتی افزایش داد، اما اگر نیرویی بیشتر از این ظرفیت اعمال شود، مجدداً اتصال آسیب می‌بیند.

ج- بررسی گزینه‌های نادرست:

ج-۱- گزینه ۱ نادرست است: این گزینه بیان می‌دارد که خاموت تنگ بسته برای مقابله با ترک خوردگی و صدمه دیدگی قطری اتصالات به‌کار می‌رود که با توجه به مطالب آورده شده در بخش مسلح‌سازی اتصال تیر به ستون، صحیح است.
 ج-۲- گزینه ۳ نادرست است: این گزینه بیان می‌دارد که گسیختگی بتون در اتصالات به علت تنش برشی می‌باشد و برای مقابله با آن از تنگ بسته استفاده می‌شود. این موضوع اشاره مستقیم به مفهوم متن در بخش مسلح‌سازی اتصال تیر به ستون دارد.
 ج-۳- گزینه ۴ نادرست است: این گزینه بیان می‌دارد که جهت مقابله با ترک خوردگی و صدمه دیدن اتصالات باید از ستون‌هایی با ابعاد بزرگ و خاموت تنگ بسته به صورت همزمان استفاده نمود. مفهوم متن در بخش مسلح نمودن اتصالات نیز دقیقاً همین مطلب می‌باشد.

۱۸ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد

الف- ترجمه صورت سؤال: چرا سبد آرماتور تمام تیرها در تراز کف طبقات آماده می‌شوند؟

ب- بررسی گزینه صحیح:

ب-۱- ترجمه گزینه چهارم: برای آن‌که به صورت آماده روی قالب‌بندی آن طبقه قرار گیرد.
 ب-۲- علت انتخاب این گزینه: این عبارت عیناً در متن موجود است. توجه شود که علت آماده‌سازی در تراز کف طبقات مورد «الف» لست نه سایر موارد.

ج- بررسی سایر گزینه‌ها:

ج-۱- گزینه ۱ نادرست است: این گزینه به علت غیرقابل اجرا بودن آماده‌سازی سبد آرماتور، برای برخی تیرها، می‌باشد و اصولاً ربطی به جواب ندارد.
 ج-۲- گزینه ۲ نادرست است: این گزینه علت راجهت ادامه دادن خاموت‌ها در داخل ستون و به دور آرماتورهای طولی می‌داند که این مطلب نیز کلاً بی‌ربط می‌باشد.
 ج-۳- گزینه ۳ نادرست است: این گزینه علت را فراهم کردن امکان استفاده از خاموت در اتصالات می‌داند.
 توجه شود که در متن آمده است: برای استفاده از خاموت در اتصالات باید آن‌ها را به صورت آماده در قالب قرار دارد (به لحاظ اجرایی) و آن‌ها را در تراز طبقات آماده می‌کنیم، پس برای آماده بودن سبد آرماتور هنگام جایگذاری در قالب‌بندی، آن‌ها را در تراز کف آماده می‌کنیم نه برای امکان استفاده خاموت‌ها در اتصالات.

۱۹ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

الف- ترجمه صورت سؤال: کدام یک از عبارتهای زیر صحیح می‌باشد؟

ب- بررسی گزینه صحیح:

ب-۱- ترجمه گزینه چهارم: جهت گیردار نمودن آرماتورهای تیر در اتصالات خارجی، آرماتورهای تیر می‌بایست مهار شوند.
ب-۲- علت انتخاب این گزینه: همان‌طور که در متن و در قسمت مهار آرماتورها آمده است، گیردار کردن آرماتورها به دو طریق یعنی افزایش ابعاد ستون‌ها و همچنین مهار کردن آن‌ها در ستون صورت می‌پذیرد.

ج- بررسی سایر گزینه‌ها:

ج-۱- گزینه ۱ نادرست است: این گزینه حداقل عرض ستون را بر مبنای آئین‌نامه آمریکا برابر ۲۰ میلی‌متر می‌داند که صحیح نیست. آئین‌نامه آمریکا حداقل عرض ستون را ۲۰ برابر قطر آرماتورها می‌داند که این مطلب به صراحت در متن آمده است.

ج-۲- گزینه ۲ نادرست است: این گزینه بیان می‌دارد که عرض حداقل ۳۰۰ میلی‌متر برای ستون‌ها طبق آئین‌نامه بریتانیا (در حالی که تیرهای متصل شده به آن‌ها طولی بیش از ۵ متر داشته باشند)، مجاز نیست در حالی که متن حداقل عرض ۳۰۰ میلی‌متر را برای این نوع ستون‌ها واجب می‌داند.

ج-۳- گزینه ۳ نادرست است: این گزینه نیز بیشترین قطر آرماتور طولی را حداقل ۲۰ میلی‌متر می‌داند در حالی که متن می‌گوید طبق آئین‌نامه آمریکا عرض ستون باید ۲۰ برابر قطر بزرگترین آرماتور طولی باشد که صرفاً شباهت کوچکی به این گزینه دارد، بنابراین این گزینه نیز صحیح نیست.

۲۰ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

الف- ترجمه صورت سؤال: کدام یک از عبارتهای زیر صحیح است؟

ب- بررسی گزینه صحیح:

ب-۱- ترجمه گزینه اول: طول مهاری از نقطه‌ای که آرماتور وارد ستون می‌شود اندازه‌گیری می‌شود.
ب-۲- علت انتخاب این گزینه: در متن آمده است که طول مهاری از بر داخلی ستون اندازه‌گیری می‌شود که همان نقطه ورود آرماتور به داخل ستون می‌باشد.

ج- بررسی گزینه‌های نادرست:

ج-۱- گزینه ۲ نادرست است: این گزینه بیان می‌دارد که آرماتور تیرها در اتصالات خارجی نباید قطع شوند که صحیح نیست و مربوط به اتصالات داخلی می‌باشد.

ج-۲- گزینه ۳ نادرست است: این گزینه می‌گوید که در اتصالات داخلی، آرماتورهای طولی می‌توانند قطع شوند در حالیکه طبق بیان صریح متن نباید آرماتورهای طولی تیرها در اتصالات داخلی قطع شوند.

ج-۳- گزینه ۴ نادرست است: این گزینه صحیح نیست زیرا مطلب بیان شده را به آئین‌نامه آمریکا نسبت می‌دهد حال آن‌که این مطلب مشکلی است که در اتصالات به وجود می‌آید و آئین‌نامه ACI در جهت رفع آن صرفاً توصیه‌هایی کرده است.
طبق مطلب اشاره شده در آئین‌نامه ACI، که هنگامی که عرض ستون‌ها کم است آرماتور فوقانی تیر را باید در ستون پایین مهار کرد که البته به لحاظ اجرایی امکان‌پذیر نیست.

۲۱ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

الف- ترجمه صورت سؤال: در پاراگراف دوم خط پنجم کلمه "arterial road ways" به چه معنی است؟

ب- بررسی گزینه صحیح:

ب-۱- ترجمه گزینه ۲: راه‌های اصلی و مهم
ب-۲- علت انتخاب این گزینه: "arterial road ways" به معنی راه‌های اصلی و شریانی می‌باشد که معادل گزینه دوم است. مثل خیابان ولی‌عصر.

ج- بررسی سایر گزینه‌ها:

ج-۱- گزینه ۱ نادرست است: چون به معنای آزادراه و بزرگراه است.

ج-۲- گزینه ۳ نادرست است: زیرا به معنی راه انحرافی است.

ج-۳- گزینه ۴ نادرست است: زیرا به معنی راه خارج شهری است.

۲۲- گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

الف- ترجمه صورت سؤال: دلیل اصلی که توسعه حمل و نقل را محدود می‌نماید چیست؟

ب- بررسی گزینه صحیح:

ب-۱- ترجمه گزینه اول: کمبود نقدینگی

ب-۲- علت انتخاب این گزینه: همان‌طور که در پاراگراف دوم به آن اشاره شده است، کمبود منابع مالی (capital shortages) و افزایش هزینه‌های ساخت و مشکلات محیطی دلایل محدودکننده توسعه حمل و نقل هستند.

ج- بررسی گزینه‌های نادرست:

مواردی که در سایر گزینه‌ها به آن‌ها اشاره شده هیچ‌یک از علل سه‌گانه نامبرده شده در بالا نمی‌باشد، بنابراین صحیح نیستند. محتوای گزینه‌ها به قرار زیر است:

ج-۱- گزینه ۲: محدودیت‌هایی که از طرف دولت برای برخی شهرها اعمال می‌شود.

ج-۲- گزینه ۳: نگرانی و اعتراض شهروندان نسبت به عملیات ساختمانی.

ج-۳- گزینه ۴: طراحی نامناسب راه که در وهله اول باید اصلاح شود.

۲۳- گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

الف- ترجمه صورت سؤال: چه مسأله‌ای باعث افزایش تقاطع بین راه‌های شریانی با آزادراه‌ها، در مناطق شهری و حومه‌ای می‌شود؟

ب- بررسی گزینه صحیح:

ب-۱- ترجمه گزینه ۳: این واقعیت که راه‌های مناطق مسکونی تنها تجهیزات در دسترس برای سرویس‌دهی به راه‌های جمع‌کننده و امکانات ترابری هستند.

ب-۲- علت انتخاب این گزینه: زیرا در متن، در ابتدای پاراگراف سوم و در ذیل عبارت فوق که عیناً در انتهای پاراگراف دوم موجود است این مسأله سبب افزایش تقاطع بین راه‌های شریانی با آزادراه‌ها در مناطق شهری و حومه عنوان شده است. بنابراین این گزینه جواب صحیح سول است.

ج- بررسی سایر گزینه‌ها:

با توجه به این‌که گزینه سوم عیناً در متن آمده است، سایر گزینه‌ها در هر صورت نمی‌توانند جواب صحیح سؤال باشند.

۲۴- گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

الف- ترجمه صورت سؤال: کدام‌یک از دلایل زیر دلیل نگرانی و اعتراض شهروندان به ترافیک نیست؟

ب- بررسی گزینه صحیح:

ب-۱- ترجمه گزینه ۳: سیستم‌های ناقص و یا نامناسب طراحی شده خیابان‌ها

ب-۲- علت انتخاب این گزینه: سیستم ناقص طراحی و یا نامناسب طراحی از طرف متخصص قابل تشخیص می‌باشد و مردم عادی قادر به تشخیص ضعف سیستم طراحی نیستند که سبب اعتراض آن‌ها شود، حال آن‌که سایر گزینه‌ها که در متن هم به آن‌ها اشاره شده است قابل رویت توسط شهروندان می‌باشند.

ج- بررسی گزینه‌های نادرست:

ج-۱- ترجمه گزینه ۱: حجم ترافیکی، که کمتر از معیارهای خیابان‌های مسکونی است. توجه شود که در پاراگراف سوم ضمن اشاره به مطلب این گزینه تأکید می‌نماید که حجم ترافیکی، حتی در این شرایط نیز می‌تواند سبب اعتراض شهروندان شود.

ج-۲- ترجمه گزینه ۲: سر و صدا، لرزش و آلودگی هوا

ج-۳- ترجمه گزینه ۴: حجم ترافیکی زیاد

۲۵ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

الف- ترجمه صورت سؤال: کدام یک از عبارات زیر صحیح می‌باشد؟

ب- بررسی گزینه صحیح:

ب-۱- ترجمه گزینه چهارم: نگرانی‌های محیطی گاهی اوقات توسعه حمل و نقل را در آینده محدود می‌نماید.

ب-۲- علت انتخاب این گزینه: به مطلب فوق عیناً در پاراگراف دوم اشاره شده است، بنابراین صحیح می‌باشد.

ج- بررسی گزینه‌های نادرست:

ج-۱- گزینه ۱ نادرست است: زیرا بیان می‌دارد که دلیل افزایش ترافیک روی اعتراض شهروندان تأثیر می‌گذارد، حال آن‌که در پاراگراف سوم صراحتاً آمده است که دلیل افزایش ترافیک اهمیتی در اعتراض مردم ندارد.

ج-۲- گزینه ۲ نادرست است: زیرا بیان می‌دارد با وجود این‌که ترافیک سبب افزایش ناراحتی مردم در مناطق مسکونی است، اما دولت اهمیتی به مسأله افزایش ترافیک نمی‌دهد، حال آن‌که در پاراگراف اول گفته شده است که این مسأله سبب نگرانی هم دولت و هم شهروندان است.

ج-۳- گزینه ۳ نادرست است: زیرا بیان می‌دارد که طراحی مناسب، حمل و نقل و نقشه تفکیکی آن و نیز طراحی خیابان‌های مسکونی امکان‌پذیر نیست، حال آن‌که در پاراگراف آخر ضمن اشاره به مطالب بالا آن‌ها را کاملاً امکان‌پذیر می‌داند.

۲۶ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

الف- ترجمه صورت سؤال: صفحاتی که تنش‌های قائم ماکزیمم و مینیمم در آن‌ها اتفاق می‌افتد و هیچ‌گونه تنش برشی وجود ندارد، صفحات ... نامیده می‌شوند.

ب- بررسی گزینه صحیح:

ب-۱- ترجمه این گزینه: اصلی

ب-۲- انتخاب گزینه: کلمه "principal" به معنی اصلی است و لفظ مورد استفاده برای صفحه تنش‌های اصلی می‌باشد.

ج- بررسی گزینه‌های نادرست:

ج-۱- گزینه ۱ نادرست است: چون به معنی قائم می‌باشد.

ج-۲- گزینه ۲ نادرست است: زیرا به معنی قائم می‌باشد.

ج-۳- گزینه ۴ نادرست است: با وجود این‌که کلمه "Major" به معنی اصلی می‌باشد اما برای تنش‌های اصلی به کار نمی‌رود.

۲۷ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

الف- ترجمه صورت سؤال: اگر یک المان تحت تنش‌های برشی به گونه‌ای قرار گیرد که دو زوج (تنش برشی) در دو صفحه عمود بر هم داشته باشیم و فقط این تنش‌ها اتفاق بیفتند گفته می‌شود که المان تحت ... قرار دارد.

ب- بررسی گزینه صحیح: با توجه به مفهوم سوال و معنی گزینه‌ها، گزینه دوم صحیح می‌باشد.

ب-۱- ترجمه گزینه ۱: کرنش

ب-۲- ترجمه گزینه ۲: برش خالص

ب-۳- ترجمه گزینه ۳: پیچش

ب-۴- ترجمه گزینه ۴: بار محوری

۲۸- گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

الف- ترجمه صورت سؤال: در نمودار تنش و کرنش نقطه‌ای که در آن به ازای یک تنش ثابت تغییر شکل‌های زیادی اتفاق می‌افتد، نقطه ... نامیده می‌شود.

ب- بررسی گزینه صحیح:

با توجه به مفهوم سؤال و ترجمه گزینه‌ها، گزینه ۱ صحیح است.

گزینه اول: نقطه تسلیم

گزینه دوم: نقطه مقاومت نهایی

گزینه سوم: نقطه شکست

گزینه چهارم: نقطه کمانش

۲۹- گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

الف- ترجمه صورت سؤال: در عضوی که تحت کشش قرار گرفته است، نیرویی که لازم است تا سبب گسیختگی شود، ... نامیده می‌شود.

ب- بررسی گزینه صحیح:

با توجه به مفهوم سؤال و معنی گزینه‌ها گزینه سوم صحیح می‌باشد.

ترجمه گزینه اول: بار خستگی

ترجمه گزینه دوم: بار محوری

ترجمه گزینه سوم: بار نهایی

ترجمه گزینه چهارم: بار مجاز

توجه شود که در گزینه چهارم اگر حداکثر بار مجاز گفته می‌شد این گزینه نیز می‌توانست صحیح باشد.

۳۰- گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

الف- ترجمه صورت سؤال: در یک عضو استوانه‌ای که تحت پیچش قرار گرفته است، ... به صورت ... از محور مرکزی تغییر می‌نماید.

ب- بررسی گزینه صحیح:

با توجه به مفهوم صورت سؤال و معنی گزینه‌ها گزینه چهارم صحیح می‌باشد.

ج- ترجمه گزینه‌ها:

ج-۱- گزینه اول: کرنش قائم - به‌طور ثابت

ج-۲- گزینه دوم: کرنش قائم - به‌طور خطی

ج-۳- گزینه سوم: کرنش برشی - به‌صورت ثابت

ج-۴- گزینه چهارم: کرنش برشی - به‌طور خطی

ریاضی

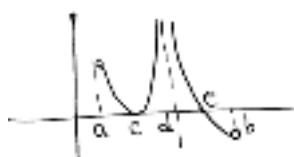
۳۱- گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

هرجا نمودار f' صعودی باشد $f'' > 0$ است.

هرجا نمودار f' نزولی باشد $f'' < 0$ است.

هرجا نمودار f' بالای محور x باشد $f' > 0$ است.

هرجا نمودار f' پایین محور x باشد $f' < 0$ است.





$$\begin{cases} f'(e^-) > 0 \\ f'(e^+) < 0 \\ f'(e) = 0 \end{cases}$$

f در x = e دارای ماکسیمم نسبی است.



$$\begin{cases} f'(d^-) = +\infty \\ f'(d^+) = +\infty \end{cases}$$

f در x = d دارای عطف قائم است.



$$\begin{cases} f'(c^-) > 0 \\ f'(c^+) > 0 \\ f'(c) = 0 \end{cases}$$

f در x = c دارای عطف افقی است.

۳۲- گزینه ۳ صحیح می باشد.



حجم مکعب: $V = m \cdot n \cdot h \rightarrow \frac{dV}{dt} = n \cdot h \frac{dm}{dt} + mh \frac{dn}{dt} + mn \frac{dh}{dt}$

اگر بخواهیم $\frac{dV}{dt} = 0$ باید:
$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = +\frac{a}{10} \\ \frac{dn}{dt} = -\frac{a}{4} \\ \frac{dh}{dt} = ? \end{cases} \quad \begin{cases} m = a \\ n = \frac{a}{2} \\ h = \frac{a}{2} \end{cases}$$
 و به ازاء

$$0 = (2a) \left(\frac{a}{2} \right) \left(\frac{a}{10} \right) + (a) \left(\frac{a}{2} \right) \left(-\frac{a}{4} \right) + (a) (2a) \frac{dh}{dt} \rightarrow 0 = \frac{a^3}{10} - \frac{a^3}{8} + 2a^2 \frac{dh}{dt} \rightarrow 2a^2 \frac{dh}{dt} = \frac{a^3}{40} \rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{a}{80}$$

۳۳- گزینه ۴ صحیح می باشد.

معادله منحنی در فرم قطبی: $2r^2 \cos^2 \theta + r^2 \cos \theta \sin \theta + 2r^2 \sin^2 \theta = 10 \rightarrow r^2 (2 + \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta) = 10$

$$\rightarrow r^2 \left(2 + \frac{\sin^2 \theta}{2} + \frac{1 - \cos^2 \theta}{2} \right) = 10 \rightarrow r^2 = \frac{20}{5 + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta}$$

لذا داریم:

$$\frac{d(r^2)}{d\theta} = \frac{-20(2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{(5 + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \tan^2 \theta = -1 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{20}{5 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{20}{5 - \sqrt{2}}}$$

۳۴- گزینه ۲ صحیح می باشد.

می دانیم اگر $f(x) = u(x)v(x)$ باشد داریم:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} u^{(n-i)} v^{(i)}$$

با انتخاب $\begin{cases} u(x) = x^2 + 3x \\ v(x) = \sin 2x \end{cases}$ داریم:

$$\begin{aligned} f^{(v)}(x) &= \binom{v}{.} (x^2 + 3x)^{(v)} (\sin 2x)^{(.)} + \dots + \binom{v}{5} (x^2 + 3x)^{(v)} (\sin 2x)^{(5)} + \binom{v}{6} (x^2 + 3x)^{(v)} (\sin 2x)^{(6)} \\ &\quad + \binom{v}{v} (x^2 + 3x)^{(.)} (\sin 2x)^{(v)} \\ &= \binom{v}{5} (2) (2^5 \cos 2x) + \binom{v}{6} (2x + 3) (-2^6 \sin 2x) + \binom{v}{v} (x^2 + 3x) (-2^v \cos 2x) \\ &= \left(\frac{v \times 6}{2}\right) (2) (2^5 \cos 2x) + (v) (2x + 3) (-2^6 \sin 2x) + (1) (x^2 + 3x) (-2^v \cos 2x) \end{aligned}$$

و ضریب جمله $\cos 2x$ چنین می‌شود $2^5 (42 - 12x - 4x^2)$

۳۵- گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -3x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2 - 2y = 0 \rightarrow y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6x \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2 \end{cases} \xrightarrow{x=0, y=1 \text{ نقطه}} \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = -2 \end{cases}$$

لذا $\Delta = B^2 - AC = 0$ بوده و نوع نقطه بحرانی در $(0, 1)$ را باید به طریقه‌ای دیگر مشخص کنیم. مشاهده می‌شود:

$$z = 4 - x^2 - (y^2 - 2y) = 4 - x^2 - ((y-1)^2 - 1) \rightarrow z(x, y) = 5 - x^2 - (y-1)^2$$

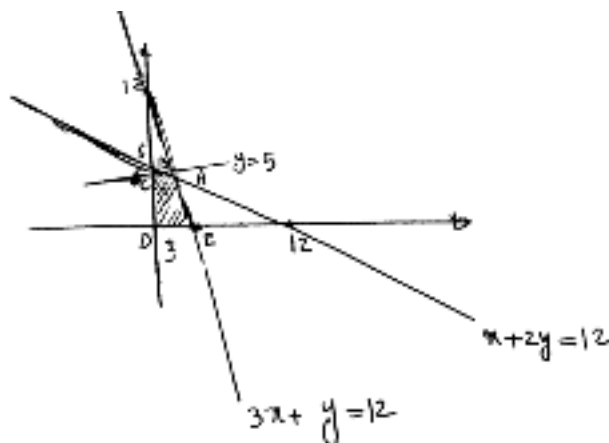
حال ملاحظه می‌شود $z(0, 1) = 5$ و $z(0 + \Delta x, 1 + \Delta y) = 5 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2$ برای Δx و Δy های بی‌نهایت کوچک:

$$z < 5 \text{ داریم } \begin{cases} \Delta x \rightarrow 0^+ \\ \Delta y \rightarrow 0^+ \end{cases} \text{ الف) اگر}$$

$$z > 5 \text{ داریم } \begin{cases} \Delta x \rightarrow 0^- \\ \Delta y \rightarrow 0^- \end{cases} \text{ ب) و } |\Delta x|^2 > |\Delta y|^2$$

لذا تابع z در نقطه بحرانی $(0, 1)$ دارای نقطه زینی است.

۳۶- گزینه ۳ صحیح می‌باشد.



$$\begin{cases} 3x+y=12 \\ x+2y=12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\frac{12}{5} \\ y=\frac{24}{5} \end{cases}$$

مختصات نقاط گوشه‌ای عبارتند از:

$$A\left(\frac{12}{5}, \frac{24}{5}\right), B(2, 5), C(0, 5), D(0, 0), E(4, 0)$$

و مقادیر تابع در این نقاط چنین است:

$$f_A = \frac{96}{5} = 19.2, f_B = 19, f_C = 15, f_D = 0, f_E = 8$$

لذا در کل ناحیه داریم:

$$\begin{cases} \max f = 19.2 \\ \min f = 0 \end{cases}$$

۳۷- گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$\text{تابع لاگرانژ: } L(x, y, z) = x + \lambda(z - x - y) + \mu(x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8)$$

$$\text{دستگاه لاگرانژ: } \begin{cases} 1 - \lambda + 2\mu x = 0 & (1) \\ -\lambda + 4\mu y = 0 & (2) \\ \lambda + 4\mu z = 0 & (3) \\ z = x + y & (4) \\ x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8 & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \rightarrow x = \frac{\lambda - 1}{2\mu} \\ (2) \rightarrow y = \frac{\lambda}{4\mu} \xrightarrow{(4)} -\frac{\lambda}{4\mu} = \frac{\lambda - 1}{2\mu} + \frac{\lambda}{4\mu} \rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \\ (3) \rightarrow z = -\frac{\lambda}{4\mu} \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{4\mu} \\ y = \frac{1}{4\mu} \\ z = \frac{-1}{4\mu} \end{cases} \xrightarrow{(5)} \frac{1}{16\mu^2} + \frac{1}{8\mu^2} + \frac{1}{8\mu^2} = 8 \rightarrow \mu = \pm \frac{1}{8}$$

$$\mu = \frac{1}{8} \rightarrow x = -2 \rightarrow f_{\min} = -2$$

$$\mu = -\frac{1}{8} \rightarrow x = 2 \rightarrow f_{\max} = 2$$

۳۸- گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

با تغییر متغیرهای $\begin{cases} u = x - 2y + 1 \\ v = 2x + y \end{cases}$ منحنی داده شده به دایره $u^2 + v^2 = 9$ تبدیل می‌شود:

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{5}$$

لذا می توان گفت مساحت سطح مورد نظر به صورت زیر به دست می آید:

$$S: \iint_{D': u^2 + v^2 \leq 1} \frac{1}{\delta} du dv = \frac{1}{\delta} S_{D'} = \frac{1}{\delta} (\pi(r^2)) = \frac{9\pi}{\delta}$$

۳۹- گزینه ۴ صحیح می باشد.

با استفاده از مختصات شبه قطبی داریم:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} r \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = r^2 \\ dx dy = \frac{1}{\sqrt{2}} r dr d\theta \end{cases}$$

لذا می توان نوشت:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \left(\sqrt{2} r^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} r^2 \sin^2 \theta \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} r dr d\theta \right) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\sqrt{2} \cos^2 \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 \theta \right) r^3 dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{2} \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \int_0^1 r^3 dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \cos 2\theta \right) d\theta \int_0^1 r^3 dr \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \theta - \frac{\sqrt{2}}{4} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\pi \right) \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \end{aligned}$$

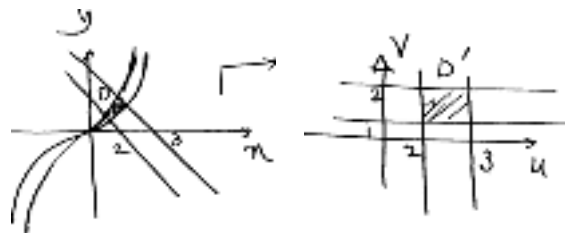
۴۰- گزینه ۱ صحیح می باشد.

با تغییر متغیرهای

$$\begin{cases} x + y = u \\ \frac{y}{x} = v \end{cases}$$

داریم:

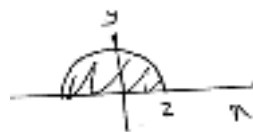
$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{y}{x} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{y}{x^2}} = \frac{x^2}{x + y} \rightarrow dx dy = \left| \frac{x^2}{x + y} \right| du dv$$



لذا می توان نوشت:

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2} dx dy = \iint_{D'} \frac{x+y}{x^2} \frac{x^2}{x+y} du dv = \iint_{D'} du dv = S_{D'} = (3-1)(2-1) = 2$$

۴۱- گزینه ۳ صحیح می باشد.



ناحیه D نسبت به محور y متقارن است:

$$\forall (x, y) \in D \rightarrow (-x, y) \in D$$

از آن جا که $f(x) = \sin^2 x$ برای متغیر x تابعی فرد است:

$$f(-x) = -f(x)$$

داریم:

$$\iint_D \sin^2 x \, dx \, dy = \cdot$$

لذا می توان نوشت:

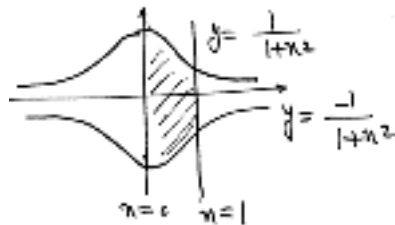
$$I = \iint_D (\sin^2 x + y) \, dx \, dy = \iint_D y \, dx \, dy = \pi$$

۴۲- گزینه ۳ صحیح می باشد.



$$\bar{y} = \frac{\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{1}{x} \, dy \, dx}{\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \, dx} = \frac{\int_0^1 \frac{1}{x} (\sqrt{x} - x^2) \, dx}{\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) \, dx} = \frac{\left(2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1}{\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1} = \frac{2 - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} = \frac{5}{1} = 5$$

۴۳- گزینه ۱ صحیح می باشد.



$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \, dx \, dy}{\iint_D dx \, dy} = \frac{\int_0^1 \int_{\frac{-1}{1+x^2}}^{\frac{1}{1+x^2}} x \, dy \, dx}{\int_0^1 \int_{\frac{-1}{1+x^2}}^{\frac{1}{1+x^2}} dy \, dx} = \frac{\int_0^1 x \frac{2}{1+x^2} \, dx}{\int_0^1 \frac{2}{1+x^2} \, dx} = \frac{\ln(1+x^2) \Big|_0^1}{2 \tan^{-1} x \Big|_0^1} = \frac{\ln 2}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2 \ln 2}{\pi}$$

۴۴- گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$\left(x + \frac{1}{y}\right)^2 y'' - 2 \left(x + \frac{1}{y}\right) y'^2 - 12y = 0 \quad \text{با نوشتن معادله به فرم}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \rightarrow \lambda = -1, 3$$

لذا پایه های جواب عبارتند از:

$$\begin{cases} \left(x + \frac{1}{y}\right)^{-1} \equiv (2x+1)^{-1} \\ \left(x + \frac{1}{y}\right)^3 \equiv (2x+1)^3 \end{cases}$$

لذا جواب عمومی چنین است.

$$y = \frac{A}{2x+1} + B(2x+1)^2$$

۴۵- گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$معادله مشخصه: 18\lambda^3 + 21\lambda^2 + 14\lambda + 4 = 0$$

چون یکی از پایه های جواب $e^{-\frac{x}{3}}$ فرض شده لذا یکی از ریشه های معادله مشخصه $-\frac{1}{3}$ بوده و به تعبیری در عبارت سمت چپ معادله مشخصه عامل $\lambda + \frac{1}{3}$ وجود دارد.

$$\begin{array}{r|l} 18\lambda^3 + 21\lambda^2 + 14\lambda + 4 & \lambda + \frac{1}{3} \\ \hline 18\lambda^3 + 6\lambda^2 & 18\lambda^2 + 12\lambda + 8 \\ \hline 12\lambda^2 + 14\lambda + 4 & \\ \hline 12\lambda^2 + 6\lambda & \\ \hline 8\lambda + 4 & \\ \hline 8\lambda + 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

برای یافتن دو ریشه دیگر می نویسیم:

$$18\lambda^2 + 12\lambda + 8 = 0 \rightarrow 9\lambda^2 + 6\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-36}}{9} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{9} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{3}$$

لذا دو پایه جواب دیگر معادله دیفرانسیل مورد نظر عبارتند از:

$$e^{-\frac{x}{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{3}\right), e^{-\frac{x}{3}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{3}\right)$$

۴۶- گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$2\lambda(\lambda-1) + a\lambda + 3 = 0 \rightarrow 2\lambda^2 + (a-2)\lambda + 3 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-(a-2) \pm \sqrt{(a-2)^2 - 24}}{4}$$

اگر بخواهیم پایه های جواب معادله کوشی مورد نظر طبیعت غیرنوسانی داشته باشند باید ریشه های معادله مشخصه حقیقی باشند (مختلط نباشند) که این می طلبد.

$$(a-2)^2 - 24 > 0 \rightarrow |a-2| > 2\sqrt{6} \rightarrow \begin{cases} a > 2(1+\sqrt{6}) \\ a < 2(1-\sqrt{6}) \end{cases}$$

و اگر بخواهیم جواب های غیرنوسانی مذکور در $x \rightarrow +\infty$ به صفر بگرایند باید هر دو ریشه معادله مشخصه منفی باشند و این می طلبد:

$$جمع دو ریشه < 0 \rightarrow -\frac{(a-2)}{2} < 0 \rightarrow a > 2$$

$$ضرب دو ریشه > 0 \rightarrow \frac{3}{2} > 0$$

پس در کل باید $a > 2(1+\sqrt{6})$ باشد.

۴۷- گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$\lambda^3 + 4\lambda = 0 \rightarrow \lambda(\lambda^2 + 4) = 0 \rightarrow \lambda = 0, \pm 2i$$

معادله مشخصه معادله همگن:

حال داریم:

$$y'' + 4y' = x^2 \rightarrow y_{1p} = x^2 (Ax^2 + Bx + C)$$

$$y'' + 4y' = x \cos 2x \rightarrow y_{tp} = x^1 ((Dx + E) \sin 2x + (Fx + G) \cos 2x)$$

و در کل:

$$y_p = y_{1p} + y_{2p} = Ax^2 + Bx^2 + Cx + (Dx^2 + Ex) \sin 2x + (Fx^2 + Gx) \cos 2x$$

که شامل هفت ضریب نامعین می‌باشد.

۴۸- گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 4D + 4} (3e^{-2x} + e^{2x}) = \frac{1}{(D+2)(D+2)} (3e^{-2x} + e^{2x}) = \frac{3x}{(-2+2)} e^{-2x} + \frac{1}{(2+2)(2+2)} e^{2x} = 3xe^{-2x} + \frac{e^{2x}}{4}$$

چون چنین گزینه‌ای وجود ندارد توجه می‌کنیم که ریشه‌های معادله مشخصه ۳- و ۲- و پایه‌های جواب معادله همگن متناظر e^{-2x} و e^{-2x} می‌باشد لذا جواب عمومی چنین است:

$$y = Ae^{-2x} + Be^{-2x} + 3xe^{-2x} + \frac{e^{2x}}{4}$$

حال ملاحظه می‌شود به ازاء $A = 1$ و $B = 0$ به جواب زیر می‌رسیم که جوابی خاص برای معادله دیفرانسیل مورد نظر است:

$$y = (1 + 3x)e^{-2x} + \frac{e^{2x}}{4}$$

۴۹- گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

معادله مشخصه معادله همگن:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$$

پایه‌های جواب معادله همگن:

$$e^{-x} \sin x, e^{-x} \cos x$$

جواب خصوصی معادله غیرهمگن:

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 2D + 2} (3xe^x) = 3e^x \frac{1}{(D+1)^2 + 2(D+1) + 2} (x) = 3e^x \frac{1}{D^2 + 4D + 5} (x)$$

$$\frac{1}{1 + \frac{4D}{5} + \frac{D^2}{5}} \left| \begin{array}{l} 5 + 4D + D^2 \\ \frac{1}{5} - \frac{4D}{5} \end{array} \right.$$

$$\frac{-\frac{4D}{5} - \frac{D^2}{5}}{-\frac{4D}{5} - \dots}$$

$$\dots$$

$$y_p = 3e^x \left(\frac{1}{5} - \frac{4D}{5} \right) (x) = 3e^x \left(\frac{x}{5} - \frac{4}{5} \right)$$

جواب عمومی:

$$y = C_1 e^{-x} \sin x + C_2 e^{-x} \cos x + 3e^x \left(\frac{x}{5} - \frac{4}{5} \right)$$

۵۰- گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

معادله مشخصه:

$$4\lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda = \pm \frac{i}{2}$$

پایه‌های جواب معادله همگن: $\cos \frac{x}{2}, \sin \frac{x}{2}$

رونسکین پایه‌های جواب:

$$W = \begin{vmatrix} \cos \frac{x}{2} & \sin \frac{x}{2} \\ -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} & \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

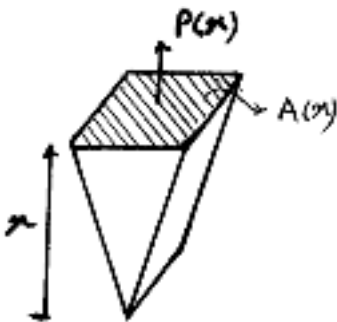
طبق روش لاگرانژ جواب خصوصی معادله غیرهمگن چنین است:

$$y_p = -\cos \frac{x}{\gamma} \int \frac{\sin \frac{x}{\gamma} \cdot \frac{\csc \frac{x}{\gamma}}{\gamma}}{\frac{1}{\gamma}} dx + \sin \frac{x}{\gamma} \int \frac{\cos \frac{x}{\gamma} \cdot \frac{\csc \frac{x}{\gamma}}{\gamma}}{\frac{1}{\gamma}} dx = -\cos \frac{x}{\gamma} \int \frac{1}{\gamma} dx + \sin \frac{x}{\gamma} \int \frac{1 \cdot \cos \frac{x}{\gamma}}{\sin \frac{x}{\gamma}} dx$$

$$= -\frac{x}{\gamma} \cos \frac{x}{\gamma} + \sin \frac{x}{\gamma} \cdot \ln \left(\sin \frac{x}{\gamma} \right)$$

مقاومت مصالح

۵۱- گزینه ۲ صحیح می‌باشد



$$P(x) = \gamma \times V(x) = \gamma \times \frac{1}{\gamma} \times A(x) \times x$$

$$\Delta = \int_0^L \frac{P(x) dx}{A(x) E} = \int_0^L \frac{\frac{\gamma}{\gamma} \times A(x) \times x dx}{A(x) E} = \frac{\gamma L^2}{\gamma E}$$

۵۲- گزینه ۱ صحیح می‌باشد

$$\Delta_s = \frac{(\gamma P - P)}{\gamma A E} + \frac{-P}{\gamma \times A E} = \frac{\Delta P L}{\gamma A E}$$

۵۳- گزینه ۴ صحیح می‌باشد

$$\Delta_{B_1} = \frac{PL}{AE}$$

$$L_{\gamma} = L + 0.2 \Delta L = 1.2 \Delta L \rightarrow \Delta_{B_{\gamma}} = \frac{P'(1.2 \Delta L)}{AE}$$

$$\Delta_{B_1} = \Delta_{B_{\gamma}} \rightarrow \frac{PL}{AE} = \frac{P'(1.2 \Delta L)}{AE} \Rightarrow P' = \frac{P}{1.2 \Delta} = 0.8P$$

بنابراین نیروی P را باید ۲۰ درصد کاهش داد.

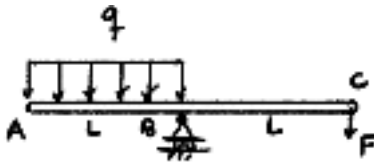
۵۴- گزینه ۳ صحیح می‌باشد

اگر نیروی قائم در محل پین برابر F فرض شود، که برای صفر شدن تغییر مکان M داریم:



$$\Delta_M = \frac{PL}{AE} + \frac{(P-F) \times \gamma L}{\gamma AE} = 0 \Rightarrow F = \gamma P \quad (1)$$

حال با در نظر گرفتن تعادل در تیر افقی داریم:



$$\sum M_B = 0$$

$$F \times L = qL \times \frac{L}{2} \rightarrow F = \frac{qL}{2} \quad (2)$$

$$(2), (1) \Rightarrow q = \frac{2P}{L}$$

۵۵- گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

رابطه سازگاری را برای سازه می‌نویسیم و فرض می‌کنیم که عکس‌العمل فشاری تکیه‌گاه سمت راست R_C باشد.

$$\left(\alpha L \Delta T - \frac{R_C L}{2AE} \right) + \left(\alpha L \Delta T - \frac{R_C L}{AE} \right) = \frac{1}{2} \alpha L \Delta T$$

$$\Rightarrow R_C = AE \alpha \Delta T \rightarrow \sigma_{\max} = \sigma_{BC} = \frac{R_C}{A} = E \alpha \Delta T$$

$$\Rightarrow \tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\max}}{2} \right)^2 + 0} = \frac{E \alpha \Delta T}{2}$$

۵۶- گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

با توجه به تقارن موجود در سازه تغییر مکان میله صلب فقط به صورت قائم می‌باشد، لذا می‌توان میله‌ها را همانند فنرهای موازی در نظر گرفت:

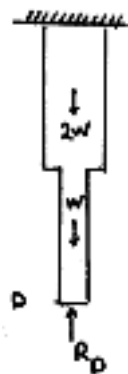
$$K_1 = K_2 = \frac{AE}{L} \cos^2 60^\circ = \frac{AE}{4L}$$

$$K_3 = \frac{AE}{\frac{L}{2}} = \frac{2AE}{L}$$

$$K_{eq} = \sum K = 2 \left(\frac{AE}{4L} \right) + \left(\frac{2AE}{L} \right) = \frac{5}{2} \times \frac{AE}{L}$$

$$\Delta_B = \frac{P}{K_{eq}} = \frac{2PL}{5AE}$$

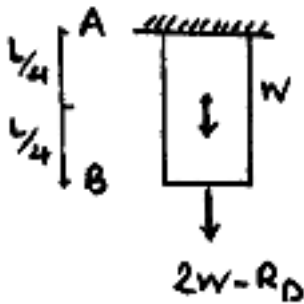
۵۷- گزینه ۲ صحیح می‌باشد.



$$\Delta_D = 0 \rightarrow \frac{(2W - R_D) \frac{L}{2}}{2AE} + \frac{(W - R_D) \frac{L}{2}}{2AE} + \frac{(W - R_D) \times \frac{L}{2}}{AE} + \frac{-R_D \times \frac{L}{2}}{AE} = 0 \Rightarrow R_D = W \Rightarrow R_A = 2W$$

هم اکنون اگر میله را از محل B برش بزنیم داریم:

(وزن قطعه AB، W می‌باشد که می‌توان آنرا در مرکز جرم میله AB قرار داد.)



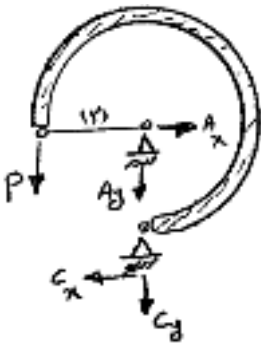
$$\Delta_B = \frac{(wL - R_D) \frac{L}{4}}{2AE} + \frac{(wL - R_D) \times \frac{L}{4}}{2AE}$$

$$\Delta_B = \frac{wL}{4AE} + \frac{wL}{4AE} = \frac{wL}{2AE}$$

۵۸ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

با توجه به شکل، عضو شماره (۳) به دو سر جسم متصل بوده و نیرو و تغییر طول آن صفر است. حال با توجه به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$\Delta_r = 0 \rightarrow \frac{F_r L_r}{AE} = 0 \rightarrow F_r = 0$$

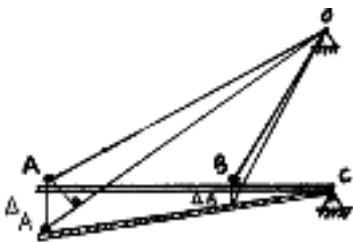


$$\sum M_C = 0 \rightarrow p \times R - A_x \times R = 0 \rightarrow A_x = p$$

نیروی داخلی ایجاد شده در میله (۲) با عکس‌العمل تکیه‌گاه A یکسان است.

پرسش: تغییر طول میله (۲) و همچنین تغییر مکان قائم نقطه B کدام است؟ (AE ثابت فرض شود).

۵۹ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.



$$\frac{\Delta_A}{\Delta_B} = \frac{\frac{3L}{2}}{\frac{L}{2}} = 3$$

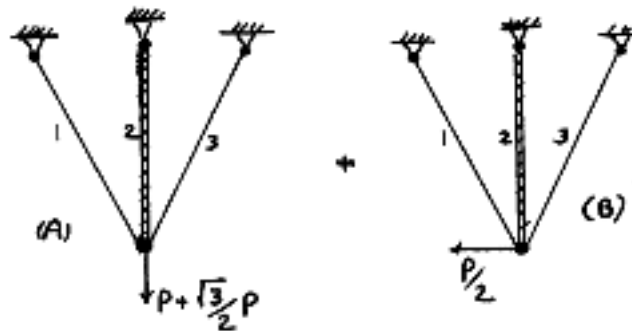
$$\begin{cases} \Delta_{OA} = \Delta_A \times \cos 60^\circ \\ \Delta_{OB} = \Delta_B \times \cos 30^\circ \end{cases} \rightarrow \frac{\Delta_{OA}}{\Delta_{OB}} = \frac{\Delta_A}{\Delta_B} \times \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = 3 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\frac{\Delta_{OA}}{\Delta_{OB}} = \frac{F_{OA}}{F_{OB}} \times \frac{L_{OA}}{L_{OB}} \rightarrow \frac{F_{OA}}{F_{OB}} = \frac{\Delta_{OA}}{\Delta_{OB}} \times \frac{L_{OB}}{L_{OA}}$$

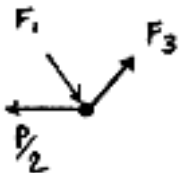
$$\rightarrow \frac{F_{OA}}{F_{OB}} = \sqrt{3} \times \frac{L}{\sqrt{3}L} = 1$$

۶۰- گزینه ۳ صحیح می باشد

با تجزیه نیروی مایل به مؤلفه های تشکیل دهنده آن داریم:



در سازه A میله ها به صورت فنرهای موازی می باشند و نیروی میله های (۱) و (۳) صفر بوده، کل بار توسط میله صلب (۲) تحمل می شود. در سازه B که باز هم میله ها به صورت فنرهای موازی می باشند نیروی میله صلب (۲) صفر می باشد (چرا که $K_{\gamma} = \frac{AE}{L} \cos^2 90 = 0$ است) و نیروی $\frac{P}{\sqrt{3}}$ بین میله های ۱ و ۳ به صورت مساوی تقسیم می شود چرا که سیستم متقارن است.

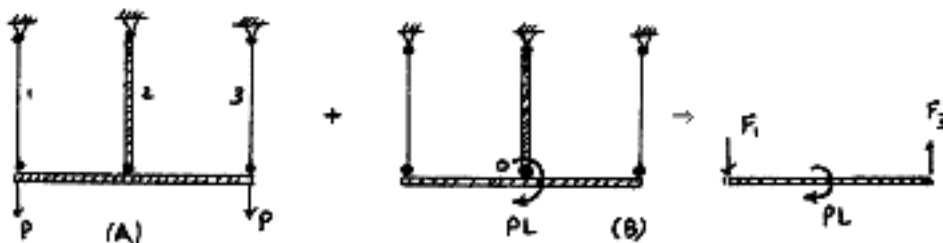


$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_1 = F_3$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow 2F_1 \sin 30 = \frac{P}{\sqrt{3}} \rightarrow F_1 = F_3 = \frac{P}{\sqrt{3}}$$

۶۱- گزینه ۳ صحیح می باشد

با تبدیل بارگذاری روی سیستم به مجموع دو بارگذاری متقارن و پادمتقارن داریم:



در سازه A که میله ها به صورت فنرهای موازی می باشند، داریم:

$$K_1 = K_3 = \frac{AE}{L}, \quad K_{\gamma} = \infty \rightarrow F_1 = F_3 = 0, \quad F_{\gamma} = 2P$$

در سازه B که بارگذاری پادمتقارن است می دانیم تحت اثر لنگر وارده سازه حول مرکز سختی خود دوران می کند و تغییر مکان مرکز سختی (وسط میله) صفر می باشد، لذا هیچ گونه نیرویی در میله صلب به وجود نمی آید و با توجه به تقارن، نیروی میله های ۱ و ۳ برابر می باشد و داریم:

$$F_1 = F_3 = \frac{M}{2L} = \frac{P}{2}$$

هم اکنون با استفاده از اصل جمع آثار می نویسیم:

$$F_{\gamma} = 2P + 0 = 2P, \quad F_1 = F_3 = 0 + \frac{P}{2} = \frac{P}{2}$$

۶۲- گزینه ۲ صحیح می باشد

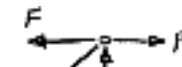
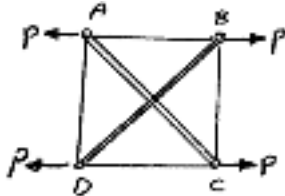
در مثلث ABC می توان نوشت:

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2 \rightarrow 2(AB) \times \Delta_{AB} + 2(BC) \times \Delta_{BC} = 2(AC) \times \Delta_{AC}$$

با توجه به صلب بودن عضو AC، Δ_{AC} برابر صفر بوده و در نتیجه داریم:

$$\Delta_{AB} \times \Delta_{AB} + \Delta_{BC} \times \Delta_{BC} = 0 \text{ و } AB = BC \rightarrow \Delta_{AB} = -\Delta_{BC} \rightarrow F_{AB} = -F_{BC} = F$$

حال با توجه به تعادل در گره B داریم:



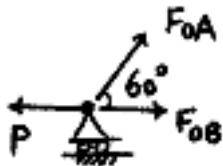
$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{BD} = \sqrt{2}F$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}F_{BD} + F = P \rightarrow F = \frac{1}{2}P$$

$$F_{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}P$$

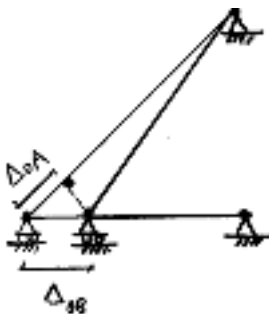
پرسش: در صورتی که دمای میله‌های غیرصلب در سیستم به مقدار ΔT نیز افزایش یابد، نیروی ایجاد شده در میله‌های صلب را به دست آورید.

۶۳ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد.



$$F_{OA} = F_{OB}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{OB} + F_{OA} \cos 60^\circ = P \rightarrow F_{OA} = F_{OB} = \frac{P}{1 + \cos 60^\circ} = \frac{2}{3}P$$



$$\Delta_{OB} \times \cos 60^\circ = \Delta_{OA}$$

$$\left[\alpha L \Delta T + \frac{F_{OB} L}{AE} \right] \times \cos 60^\circ = \alpha (\sqrt{2} L) \Delta T + \frac{F_{OA} \times L}{AE}$$

$$\rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{P}{AE} = -\sqrt{2} \alpha L \Delta T \rightarrow \Delta T = \frac{-2P}{9AE\alpha}$$

۶۴ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

اگر شعاع بخش لوله‌ای را R فرض کنیم:

$$a^2 + a^2 = (\sqrt{2}R)^2 \rightarrow 2a^2 = 2R^2 \rightarrow a = \sqrt{2}R$$

هر دو بخش مقطع همانند فنرهای موازی می‌باشند چراکه $\Phi_{in} = \Phi_{out}$ و می‌دانیم که در این فنرهای موازی لنگر پیچشی به نسبت سختی

پیچشی $\left(\frac{GJ}{l} \right)$ توزیع می‌شود که البته G و l یکسان هستند و داریم:

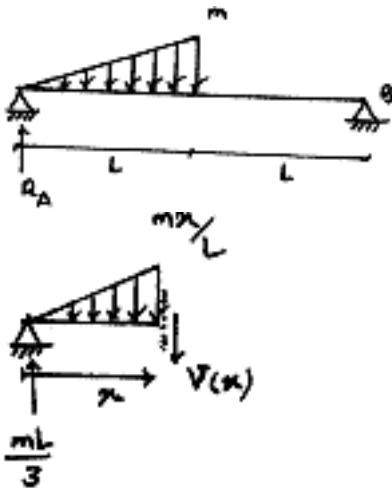
$$\tau = \frac{T}{\sqrt{2} A_m t} \rightarrow \frac{\tau_{in}}{\tau_{out}} = \frac{T_{in}}{T_{out}} \times \frac{A_{out}}{A_{in}} \times \frac{t}{t} = \frac{J_{in}}{J_{out}} \times \frac{A_{out}}{A_{in}} \times \sqrt{2}$$

$$\rightarrow \frac{\tau_{in}}{\tau_{out}} = \frac{a^2 t}{\sqrt{2} \pi R^2 (\sqrt{2} t)} \times \frac{\pi R^2}{a^2} \times \sqrt{2} = \frac{a}{\sqrt{2} R} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۶۵ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

با استفاده از روش تیر فرضی داریم:

محل زاویه پیچش حداکثر در نقطه‌ای است که لنگر پیچشی داخلی صفر می‌باشد و لذا در تیر مشابه در محلی که مقدار برش صفر است زاویه پیچش حداکثر مقدار را خواهد داشت:



$$\sum M_B = 0 \rightarrow R_A \times 2L = \frac{mL}{2} \times \frac{4L}{3}$$

$$\rightarrow R_A = \frac{mL}{3}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V(x) = \frac{mL}{3} - \frac{mx}{L} \times \frac{x}{2}$$

$$V(x) = 0 \rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}}L$$

۶۶ - گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\tau = \frac{T}{\sqrt{A_m t}}, \tau_1 = \tau_2 \rightarrow \frac{T}{2 \times a^2 \times t} = \frac{T}{2 \times (2b^2) \times (2t)} \rightarrow a^2 = 2b^2 \rightarrow a = \sqrt{2}b \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{J_2}{J_1}$$

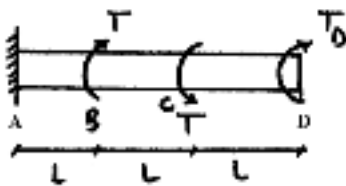
$$J_1 = a^2 t$$

$$J_2 = \frac{2(2b^2)^2}{\frac{2b}{2t} + \frac{2b}{2t} + \frac{b}{2t} + \frac{b}{2t}} = \frac{16b^4}{\frac{4b}{t}} = \frac{16b^3 t}{4} = 4b^3 t$$

$$\rightarrow \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{16}{4} \times \frac{b^3}{a^3} = \frac{16}{4} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

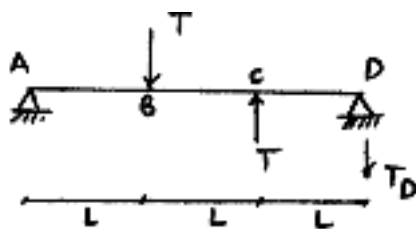
۶۷ - گزینه ۱ صحیح می باشد.

روش اول: اگر تکیه گاه D را باز کنیم:

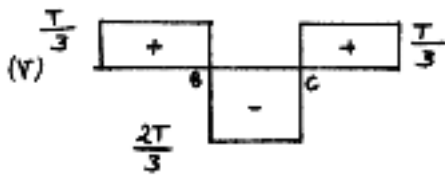


$$\Phi_D = 0 \rightarrow \frac{T_D \times L}{GJ} + \frac{(T_D - T) \times L}{GJ} + \frac{T_D \times L}{GJ} = 0 \rightarrow T_D = \frac{T}{3} \rightarrow T_{BC} = \frac{2T}{3} \rightarrow \Phi_{B/C} = \frac{\frac{2T}{3} \times L}{GJ} = \frac{2TL}{3GJ}$$

روش دوم: چون میله منشوری است می توان از تیر فرضی برای تحلیل استفاده نمود:



$$\sum M_A = 0 \rightarrow T_D = \frac{T}{3}$$



زاویه پیچش نسبی بین دو نقطه در سازه اصلی، معادل سطح زیر دیاگرام $\frac{V}{GJ}$ بین آن دو نقطه در تیر فرضی می‌باشد:

$$\Phi_{B/C} = \frac{\frac{2T}{3} \times L}{GJ} = \frac{2TL}{3GJ}$$

۶۸- گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

چون زاویه پیچش B برای میله‌های AB و BC (در بخش میانی و پوسته خارجی) یکسان می‌باشد لذا می‌توان گفت: سیستم از سه فنر موزای تشکیل شده است. سهم پوسته آلومینیومی از لنگر T بر حسب سختی پیچشی این بخش به دست می‌آید:

$$T_{AL} = T \times \frac{K_{AL}}{\sum K}$$

$$K_{AL} = \frac{GJ}{L} = \frac{G}{L} \times \frac{\pi}{2} \left[(2R)^4 - R^4 \right] = \frac{15\pi GR^4}{2L}$$

$$K_{AB} = K_{BC_s} = \frac{5GJ_s}{L} = \frac{5G}{L} \times \frac{\pi}{2} R^4 = \frac{5\pi GR^4}{2L} \Rightarrow T_{AL} = T \times \frac{15}{15+5+5} = \frac{3T}{5}$$

$$\tau_{\max AL} = \frac{\frac{3T}{5} \times 2R}{\frac{\pi}{2} \times \left[(2R)^4 - R^4 \right]} = \frac{12T}{5\pi R^3} = \frac{4T}{\pi R^3}$$

۶۹- گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

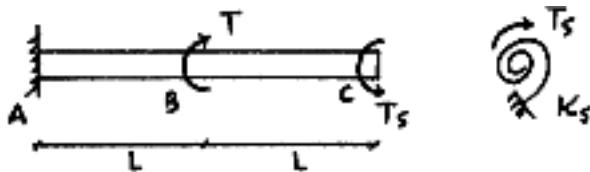
اگر تنش برشی ایجاد شده در محل اتصال دو قطعه τ و فواصل پیچ‌ها از یکدیگر L باشد، در آن صورت خواهیم داشت:

$$\frac{2\pi R}{L} \times \tau \times L = F \Rightarrow \frac{2\pi R}{L} \times \frac{TR}{J} \times L = F$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi R^2 L \times T}{L \times \frac{\pi}{2} (2R)^4} = F \Rightarrow L = \frac{32R^2 F}{T}$$

۷۰- گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

اگر فنر پیچشی را باز کنیم خواهیم داشت:



زاویه پیچش نقطه C با پیچش فنر یکسان است، لذا:

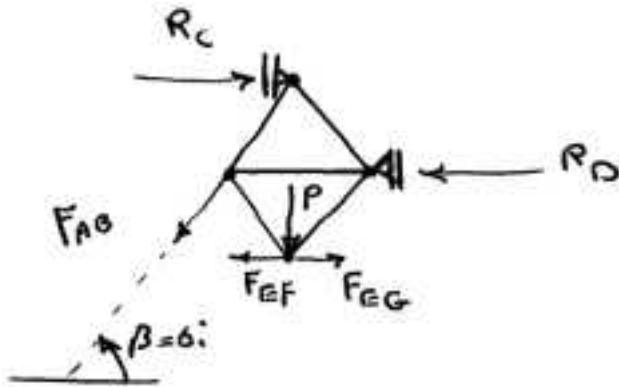
$$\Phi_c = \Phi_s$$

$$\Phi_c = \frac{(T - T_s)L}{GJ} + \frac{-T_s \times L}{GJ} = \Phi_s = \frac{T_s}{K_s} = \frac{T_s L}{2GJ} \Rightarrow T_s = \frac{2T}{5}$$

$$\Phi_B = \frac{T_{AB} \times L}{GJ} = \frac{\frac{2T}{5} \times L}{GJ} = \frac{2TL}{5GJ}$$

۷۱- گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

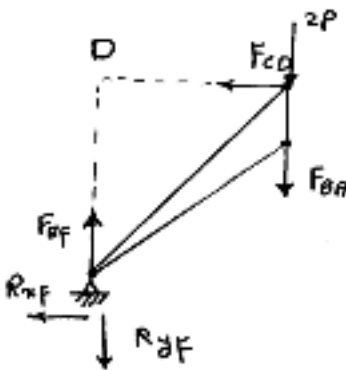
خرپای مطرح شده نامعین است ولی گاهی اوقات تحت بارگذاری خاصی نیروی برخی از میله‌ها از روابط استاتیکی قابل تعیین می‌باشد. اگر مقطعی در نظر بگیریم تا عضو AB و گره E را قطع کند، خواهیم داشت:



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{AB} \sin 60^\circ - P = 0 \Rightarrow F_{AB} = \frac{-P}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-2\sqrt{3}P}{3}$$

۷۲- گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

اگر خرپای FBC را جدا کنیم، خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -R_{xF} + 2p = 0 \Rightarrow R_{xF} = 2p$$

$$+\circlearrowleft \sum M_D = 0 \Rightarrow -2p \times \frac{2L}{3} - F_{BA} \times L - 2pL = 0 \Rightarrow F_{BA} = \frac{-10P}{3}$$

۷۳- گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مقطعی در نظر گرفته می‌شود تا میله‌های AE و AD و CD را قطع کند. با گشتاورگیری حول نقطه B داریم:

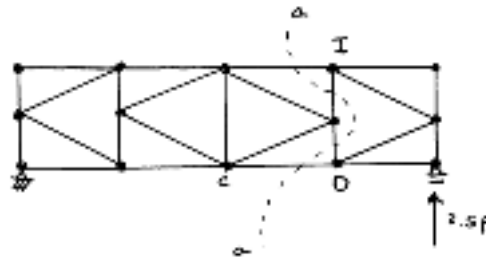
$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow -F_{AD} \times 2 - 5 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 = 0$$

$$F_{AD} = \frac{-5\sqrt{3}}{4} \text{ ton}$$

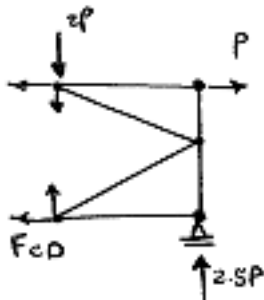
۷۴- گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

با لنگری حول نقطه A، داریم:

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow R_{yE} \times 4L - pL - pL - p \times 2L - 2p \times 2L = 0 \Rightarrow R_{yE} = 2.5p$$



مقطع (a-a) را در شکل فوق برای یافتن نیروی میله CD انتخاب می‌کنیم، و با گشتاورگیری حول I، نیروی CD را محاسبه می‌نمائیم.



$$\sum^+ M_I = 0 \Rightarrow -F_{CD} \times L + 2.5pL = 0 \Rightarrow F_{CD} = 2.5p$$

۷۵- گزینه ۲ صحیح می‌باشد

خرپای (a)، خرپای مختلط است. اگر میله AD را حذف و به جای آن میله BE را قرار دهیم، خرپای شکل (c) هم، همان خرپای (b) می‌باشد که تحت بار واحد کششی قرار دارد. میله BE در خرپای اصلی مختلط وجود ندارد و مطابق جدول هم نیروی آن صفر است. مطابق جدول و روش هنبرگ داریم:

$$F_{BE} = F'_{BE} + f'_{BE} X = 0$$

F_{BE} : نیروی BE در بارگذاری (a) که صفر می‌باشد، F'_{BE} نیروی میله BE در خرپای معین و پایدار (b) و f'_{BE} نیروی میله BE در بارگذاری شکل (c) می‌باشد. مطابق جدول داریم:

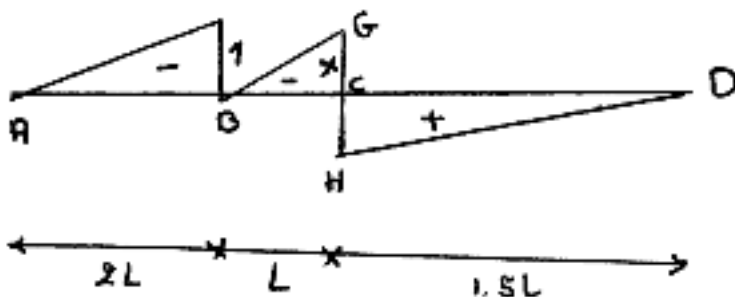
$$X = \frac{-F'_{BE}}{f'_{BE}} = -\frac{-P\sqrt{3}}{0.9} = \frac{P \times 1.7}{0.9} = 1.9P$$

$$F_i = F'_i + f'_i X \Rightarrow F_{AC} = \frac{-P}{\sqrt{3}} + \left(\frac{-1}{1.0}\right)(1.9P) = -0.5095P$$

$$F_{EF} = P + \left(\frac{-1}{1.0}\right)(1.9P) = -0.9P$$

برای مطالعه بیشتر روش Henneberg's Method مطالعه شود.

۷۶- گزینه ۴ صحیح می‌باشد



$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{L} \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{2}}, \quad \frac{x}{L} = \frac{CH}{1.5L} \Rightarrow CH = 0.75L$$

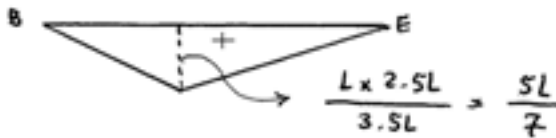
$$S_{DCH} = \frac{\overline{CH} \times 1.5L}{2} = \frac{0.75 \times 1.5L}{2} = 0.56L$$

$$V_B^L = 0.56L \times 2 = 1.12L \quad (\text{در CD قرار بگیرد})$$

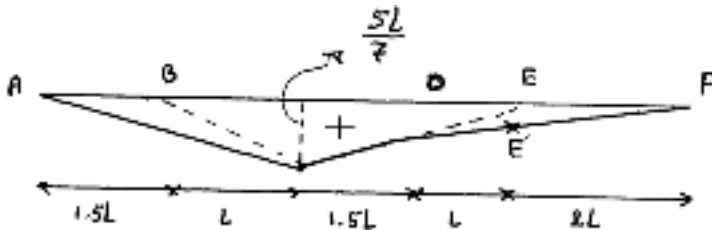
نکته: شیب دو طرف در مفصل برشی C باید با هم مساوی باشد و لذا از طریق تشابه، مقدار \overline{CH} حساب شد.

۷۷ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد

خط تأثیر در نقطه C، در تیر BE به صورت زیر می‌باشد:



با توجه به حرکت AC و CD و DF، خط تأثیر به این صورت اصلاح می‌شود:



ارتفاع خط تأثیر در نقطه D به این صورت محاسبه می‌شود:

$$\frac{h_D}{L} = \frac{0.56L}{2.5L} \Rightarrow h_D = \frac{2}{5}L$$

ارتفاع خط تأثیر در نقطه E به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{h_{E'}}{2L} = \frac{h_D}{2L} \Rightarrow \frac{h_{E'}}{2} = \frac{2}{5} \Rightarrow h_{E'} = \frac{4}{5}L$$

اگر دو بار متحرک به مقدار p و $2p$ به فاصله $2L$ از هم در نقطه F و E' قرار بگیرد، لنگر نقطه C برابر است با:

$$M_C = p \times 0 + 2p \times \frac{4}{5}L = \frac{8}{5}pL$$

اگر بار گسترده‌ای با شدت $\frac{P}{L}$ به طول L در ناحیه DE' قرار بگیرد، لنگر نقطه C برابر است با:

$$\text{مساحت دوزنقه} = \frac{h_D + h_{E'}}{2} \times L = \frac{0.56L}{2} \times L = \frac{0.56L^2}{2}$$

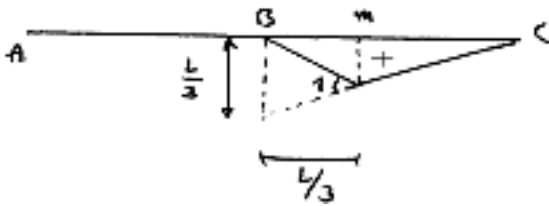
$$M_C = \frac{0.56L^2}{2} \times \frac{P}{L} = \frac{0.56PL}{2}$$

اگر بار متمرکز P در نقطه C قرار داشته باشد، خواهیم داشت:

$$M_C = h_C \times P = \frac{0.56L}{2} \times P = \frac{0.56PL}{2}$$

۷۸- گزینه ۴ صحیح می‌باشد

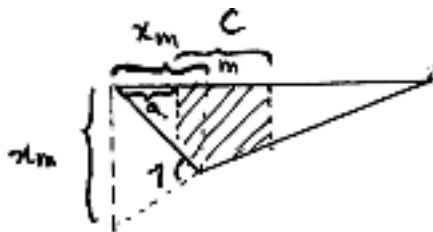
خط تأثیر لنگر خمشی نقطه m در تیر مذکور به این صورت نمایش داده می‌شود:



باید تعیین کنیم که در اثر عبور بار گسترده روی BC، قطعه بار گسترده در کجا باشد تا بیشترین مساحت را ایجاد کند. اگر بار گسترده یکنواختی در حالت کلی در نظر بگیریم، مقدار a (طولی که باید در نظر گرفته شود تا بیشترین مساحت را ایجاد کند) از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

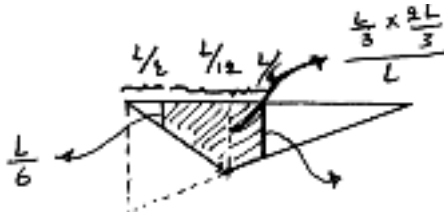
C = طول بار گسترده

L = طول قاعده مثلث



$$a = \frac{x_m(L-C)}{L} \Rightarrow a = \frac{\frac{L}{3}\left(L - \frac{L}{3}\right)}{L} = \frac{L}{6}$$

پس مساحت مذکور به این صورت محاسبه می‌شود:



$$\frac{x}{\frac{\sqrt{L}}{9}} = \frac{L}{\frac{\sqrt{L}}{3}} \Rightarrow x = \frac{L}{6}$$

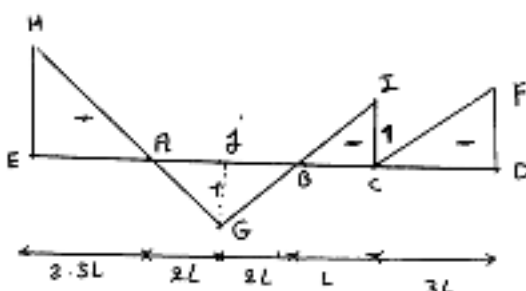
$$S = \frac{\left(\frac{L}{6} + \frac{\sqrt{L}}{9}\right) \times \frac{L}{12} + \left(\frac{L}{6} + \frac{\sqrt{L}}{9}\right) \times \frac{L}{6}}{2} = \frac{5\sqrt{L}^2}{144}$$

ماکزیمم لنگر خمشی در نقطه m وقتی به وجود می‌آید که بار گسترده به فاصله $\frac{L}{6}$ از نقطه B فاصله داشته باشد.

$$M_{\max} = \frac{5}{144} qL^2$$

۷۹- گزینه ۱ صحیح می‌باشد

خط تأثیر برش در سمت چپ نقطه C، به این صورت می‌باشد:



پاره‌خط‌های BI و CF با هم موازی هستند و دو مثلث BIC و CFD با هم متشابه هستند:

$$\frac{1}{DF} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{1}{DF} = \frac{L}{2L} \Rightarrow DF = 2$$

دو مثلث BIC و JGB متشابه هستند و خواهیم داشت:

$$\frac{GJ}{2L} = \frac{1}{L} \Rightarrow GJ = 2$$

دو مثلث EHA و AJG متشابه بوده و خواهیم داشت:

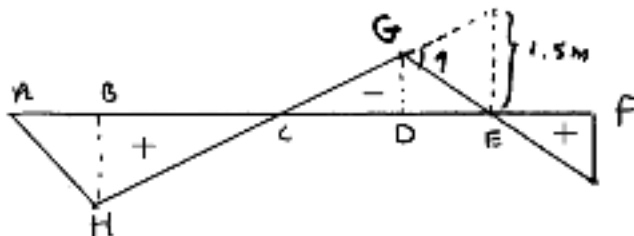
$$\frac{EH}{2} = \frac{2.5L}{2L} \Rightarrow EH = 2.5$$

طول DF از بقیه عرض‌های خط تأثیر بیشتر می‌باشد و خواهیم داشت:

$$V_C^L = 2 \times 2 = 4 \text{ ton}$$

۸۰- گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

زاویه واحد در نقطه D، به این صورت نمایش داده می‌شود:



$$\frac{GD}{1.5} = \frac{CD}{CE} \Rightarrow \frac{GD}{1.5} = \frac{2}{3.5} \Rightarrow GD = \frac{6}{7}$$

$$\frac{GD}{CD} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow \frac{6}{7} = \frac{BH}{3} \Rightarrow BH = \frac{9}{7}$$

$$S_{BCH}^{\Delta} = \frac{BH \times BC}{2} = \frac{9}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{14} \text{ m}^2$$

$$M_D = S_{BCH}^{\Delta} \times 2 = \frac{27}{7} \text{ ton.m} = 3.9 \text{ ton.m}$$

۸۱- گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مکانیزم ایجاد خط تأثیر برش، طوری عمل می‌کنند که شیب دو طرف مکانیزم با هم برابر باشد. اگر بار واحد را در سرتاسر تیر در نظر بگیریم و ارتفاع خط تأثیر در سمت راست نقطه B، x و ارتفاع خط تأثیر در سمت چپ نقطه B، برابر y باشد، داریم:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{x}{L} = \frac{y}{3L} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

اگر ارتفاع خط تأثیر C، h_C باشد، با تشابه داریم:

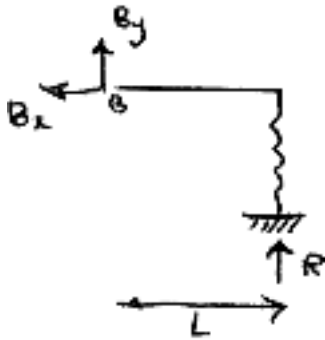
$$\frac{h_C}{\frac{1}{4}} = \frac{2L}{L} \Rightarrow h_C = \frac{1}{2}$$

مقدار برش در سمت راست نقطه B، وقتی بار ۲ ton در نقطه C باشد، داریم:

$$V_B^R = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ ton}$$

۸۲- گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

وقتی بار واحد به مفصل خمشی برسد، مقطع زیر را در نظر می‌گیریم.



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow RL = 0 \Rightarrow R = 0$$

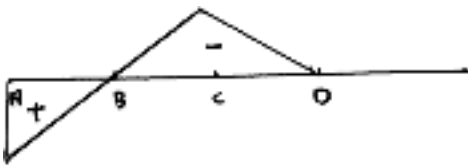
به عبارت دیگر وقتی بار P به نقطه B می‌رسد واکنش فنر صفر می‌باشد.

۸۳- گزینه ۳ صحیح می‌باشد

زمانی که بار واحد در قسمت CB قرار بگیرد، عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه A برابر واحد خواهد بود و لنگر آن حول نقطه B مقدار ثابت $1 \times \overline{AB}$ می‌باشد. پس عرض خط تأثیر در ناحیه BC باید مقدار ثابتی باشد، که فقط گزینه سوم دارای چنین ویژگی می‌باشد.

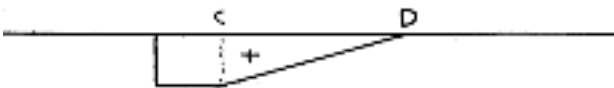
۸۴- گزینه ۴ صحیح می‌باشد

در گزینه اول، خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاه A به صورت زیر است:

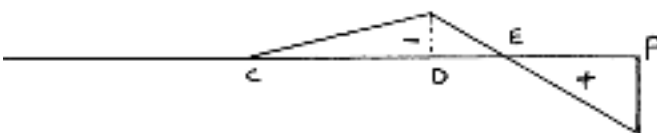


پس اگر بار در ناحیه DF، قرار بگیرد، عکس‌العمل تکیه‌گاه A صفر می‌شود.

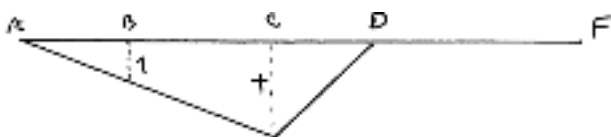
در گزینه دوم، خط تأثیر برش در وسط BC به این صورت می‌باشد که از یک مستطیل و یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل شده است.



در گزینه سوم، خط تأثیر عکس‌العمل تکیه‌گاه F به صورت زیر می‌باشد:



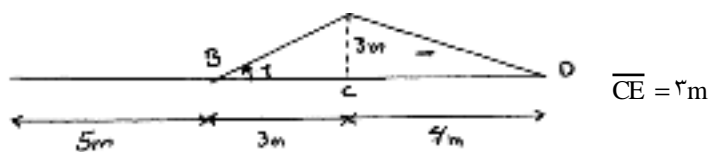
در گزینه سوم اگر بار در ناحیه EF باشد، عکس‌العمل F به طرف بالا است و وقتی بار در ناحیه EC می‌باشد، عکس‌العمل F به سمت پایین خواهد بود.



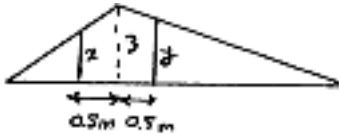
در گزینه چهارم، بار باید در ناحیه DF باشد تا عکس‌العمل B صفر شود. پس گزینه چهارم غلط است.

۸۵- گزینه ۲ صحیح می‌باشد

خط تأثیر لنگر در نقطه B، به صورت زیر است:



پس باید بارها در اطراف نقطه C باشند تا ماکزیمم لنگر در نقطه B، به وجود آید.



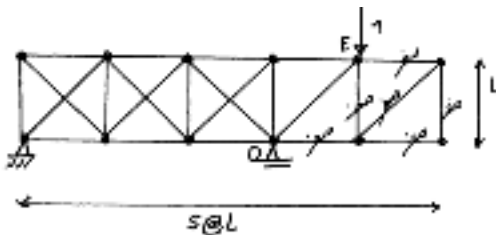
$$\frac{x}{2.5} = \frac{3}{3} \Rightarrow x = 2.5 \text{ m}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{y}{3.5} \Rightarrow y = \frac{21}{8} \text{ m}$$

$$M_{\max}(B) = 2 \times 2.5 + 2 \times 3 + 2 \times \frac{21}{8} = 16.24 \text{ ton.m}$$

۸۶- گزینه ۲ صحیح می‌باشد

اگر بار واحد قائم در نقطه E قرار بگیرد، خواهیم داشت:



$$\frac{F_{DE}}{1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow F_{DE} = \sqrt{2} \quad (\text{فشاری})$$

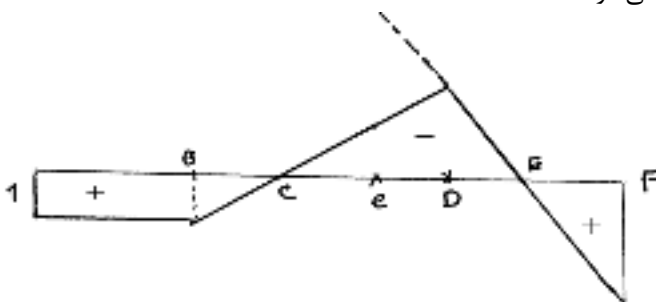
اگر بار در گره‌های A و C و یا بین آن‌ها قرار گیرد، نیروی عضو DE صفر است. راه‌حل دیگر مسأله این است که اگر عضو DE از خراب‌پرداشته شود و آنگاه دو گره D و E به هم نزدیک شوند، در اثر این جابجایی شکلی که برای خرابی به دست می‌آید که در گزینه ۲ رسم شده است.

۸۷- گزینه ۴ صحیح می‌باشد

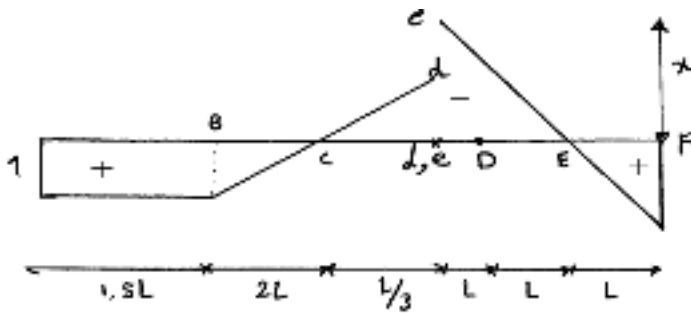
با نوشتن معادله تعادل در گره R، نتیجه می‌شود که نیروی عضو RQ و OR با هم برابر است. از تعادل گره O نتیجه می‌شود که نیروی عضو OR با OJ برابر است. در گره J در امتداد عضو OJ نیرویی نداریم و لذا نیروی عضو OJ صفر است در نهایت تحت هر شرایطی، نیروی عضو RQ صفر خواهد بود.

۸۸- گزینه ۴ صحیح می‌باشد

خط تأثیر برش در تکیه‌گاه گیردار در تیر اصلی به این صورت ترسیم می‌شود:



خط تأثیر تیرچه طولی، با نقطه‌یابی به صورت زیر می‌باشد:



برای به وجود آمدن ماکزیمم نیروی برشی، بار متمرکز ۲ ton باید در نقطه e قرار بگیرد. عرض خط تأثیر در نقطه D از تیر اصلی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{1}{2L} = \frac{h_D}{\frac{4L}{3}} \Rightarrow h_D = \frac{2}{3}$$

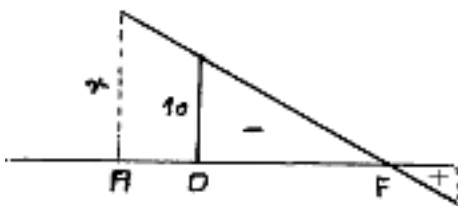
اگر عرض خط تأثیر تیرچه طولی در نقطه e را x بنامیم، خواهیم داشت:

$$\frac{x}{h_D} = \frac{2L}{L} \Rightarrow x = 2h_D = \frac{4}{3}$$

$$V_{\max} (\text{تکیه‌گاه}) = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \text{ ton} \Rightarrow V_{\max} (\text{تهایی}) = \frac{8}{3} \times 3 = 8 \text{ ton}$$

۸۹- گزینه ۲ صحیح می‌باشد

خط تأثیر تیر در ناحیه AB به این صورت می‌باشد:

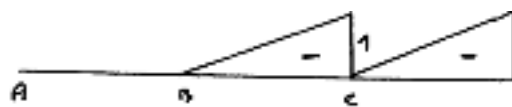


$$\frac{x}{11} = \frac{10}{11} \Rightarrow x = 10 \text{ m}$$

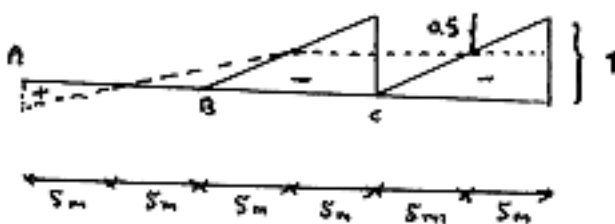
$$M_{\max} = -10 \times 10 = -100 \text{ ton.m}$$

۹۰- گزینه ۳ صحیح می‌باشد

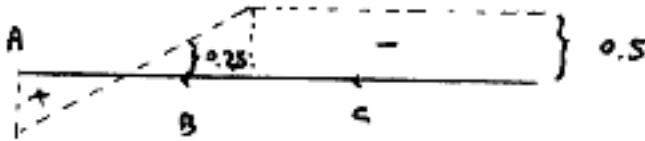
ابتدا خط تأثیر برش در سمت چپ تکیه‌گاه C را ترسیم می‌کنیم.



حال برای رسم خطوط تأثیر تیرچه طولی با استفاده از نقطه‌یابی خواهیم داشت:



چون محاسبات با تأثیر علامت صورت می‌پذیرد، حتماً باید از ترکیب مثبت و منفی برای نتیجه مطلوب بهره ببریم. با استفاده از تشابه مقدر ۰.۵ و ۰.۲۵ برای عرض خطوط تأثیر C و B به دست می‌آید.



با توجه به شکل بار باید در ناحیه abc قرار بگیرد. مساحت این قطعه عبارت است از:

$$\frac{0.5 \times 0.25}{2} - \frac{0.5 \times 1.0}{2} = \frac{-15}{8} \Rightarrow \frac{15}{8} q = 25 \rightarrow q = \frac{40}{3} \frac{\text{ton}}{\text{m}}$$

مکانیک خاک

۹۱ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد

$$\begin{cases} Q = KA \left(\frac{\Delta h}{L} \right) \\ Q = \frac{V_{\text{حجم}}}{t} \end{cases} \rightarrow K = \frac{VL}{Ath} = \frac{54 \times 15}{\left(\frac{\pi \times 6^2}{4} \right) \times 5 \times 30} = 0.2 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

$$v_s = \frac{v}{n}, v = Ki, n = \frac{e}{1+e} \rightarrow v_s = \frac{0.2 \left(\frac{30}{15} \right)}{\left(\frac{1}{1+1} \right)} = 0.8 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

۹۲ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد

اگر ضریب نفوذپذیری خاک در امتداد افق برابر K_h و در امتداد قائم برابر K_v باشد، در آن صورت ضریب نفوذپذیری خاک در امتدادی که با افق زاویه α می‌سازد، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{1}{K_s} = \frac{\cos^2 \alpha}{K_h} + \frac{\sin^2 \alpha}{K_v} \rightarrow \frac{1}{K_s} = \frac{\cos^2 30^\circ}{1.5 \times 10^{-4}} + \frac{\sin^2 30^\circ}{1 \times 10^{-4}} \rightarrow K_s = 8 \times 10^{-4} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

تذکر: زاویه با امتداد قائم برابر 60° است. بنابراین زاویه با امتداد افق 30° خواهد بود.

۹۳ - گزینه ۳ صحیح می‌باشد

$$K_v = \frac{H_1 + H_2 + H_3}{\frac{H_1}{K_1} + \frac{H_2}{K_2} + \frac{H_3}{K_3}} = \frac{L + L + L}{\left(\frac{L}{K} \right) + \left(\frac{L}{\sqrt{K}} \right) + \left(\frac{L}{\sqrt{K}} \right)} = \frac{12}{\sqrt{3}} K$$

$$K_h = \frac{K_1 H_1 + K_2 H_2 + K_3 H_3}{H_1 + H_2 + H_3} = \frac{(\sqrt{K})(L) + (\sqrt{K})(L) + (\sqrt{K})(L)}{L + L + L} = \frac{28}{3} K$$

$$K_e = \sqrt{K_h \cdot K_v} = \sqrt{\left(\frac{28}{3} K \right) \left(\frac{12}{\sqrt{3}} K \right)} = \sqrt{112} K$$

۹۴ - گزینه ۴ صحیح می‌باشد

طبق معادله پیوستگی جریان و با استفاده از قانون دارسی می‌نویسیم:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 \rightarrow K_1 i_1 A_1 = K_2 i_2 A_2 = K_3 i_3 A_3$$

از طرفی با توجه به مشخصات لایه‌ها داریم:

$$d_2 = 2d_1, \quad d_3 = 4d_1, \quad K_2 = 2K_3, \quad K_1 = 4K_3$$

بنابراین با جایگذاری در رابطه فوق به دست می‌آید:

$$(\sqrt{K_3}) \times i_1 \times \frac{\pi}{4} d_1^2 = (2\sqrt{K_3}) \times i_2 \times \frac{\pi}{4} (2d_1)^2 = \sqrt{K_3} \times i_3 \times (\sqrt{4} d_1)^2 \rightarrow i_1 = 2i_2 = 4i_3$$

$$\rightarrow \frac{i_r}{i_1} = \frac{\left(\frac{\Delta h_r}{L}\right)}{\left(\frac{\Delta h_1}{L}\right)} = \frac{\Delta h_r}{\Delta h_1} = \frac{1}{4} = 0.25$$

راه حل دوم:

وقتی امتداد جریان آب در خاک عمود بر سطح لایه‌هاست، می‌توان مقدار افت بار آبی در هر لایه را (مثلاً لایه m ام) به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\Delta h_m = \frac{\left(\frac{L}{AK}\right)_{i=m}}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{L}{AK}\right)_i} \cdot \Delta h \quad (\text{سعی کنید این رابطه را خودتان اثبات کنید})$$

بنابراین برای تعیین نسبت افت بار آبی در لایه سوم به لایه اول خواهیم داشت:

$$\frac{\Delta h_r}{\Delta h_1} = \frac{\left(\frac{L}{AK}\right)_r}{\left(\frac{L}{AK}\right)_1} = \frac{\left[\frac{L}{d_r^3 K_r}\right]}{\left[\frac{L}{d_1^3 K_1}\right]} = \left(\frac{K_1}{K_r}\right) \left(\frac{d_1}{d_r}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} = 0.0156$$

۹۵ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد

طبق معادله پیوستگی جریان و با استفاده از قانون دارسی می‌نویسیم:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \rightarrow K_1 i_1 A_1 + K_2 i_2 A_2 = K_3 i_3 A_3$$

در لایه‌های (۱) و (۲) امتداد جریان به موازات لایه‌هاست، بنابراین $i_1 = i_2$ می‌باشد که با توجه به اینکه $K_1 = K_2$ است، خواهیم داشت:

$$K_1 i_1 A_1 + K_1 i_2 A_2 = K_3 i_3 A_3 \rightarrow K_1 i_1 (A_1 + A_2) = K_3 i_3 A_3$$

$$\xrightarrow{A_1 + A_2 = A_3} K_1 i_1 = K_3 i_3 \xrightarrow{i_1 > i_3} K_1 < K_3$$

۹۶ - گزینه ۱ صحیح می‌باشد

$$\begin{cases} \frac{u_B}{\gamma_w} = \frac{19.6}{9.8} + 1 = 3 \text{ m} \\ \frac{u_C}{\gamma_w} = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{u_m}{\gamma_w} = \frac{3+0}{2} = 1.5 \text{ m}$$

۹۷ - گزینه ۲ صحیح می‌باشد

ارتفاع ستون آب در پیزومتر که در یک نقطه قرار می‌گیرد، بار فشار را در آن نقطه نشان می‌دهد. بنابراین می‌توان برای ترازهای X-X و Y-Y نوشت:

$$\frac{\Delta P_{XY}}{\gamma_w} = \Delta h_{XY} - \Delta Z_{XY} = \Delta h_r - L_r$$

$$\Delta h_r = \frac{\left(\frac{L}{AK}\right)_{i=r}}{\sum_{i=1}^r \left(\frac{L}{AK}\right)_i} \cdot \Delta h = \frac{\frac{1}{(A)(2K)}}{\frac{1}{(A)(K)} + \frac{1}{(A)(2K)} + \frac{1}{(A)(K)}} \times 3 = 0.6 \text{ m} \quad , \quad L_r = 1 \text{ m}$$

$$\rightarrow \frac{\Delta P_{XY}}{\gamma_w} = 0.6 - 1 = -0.4 \text{ m} \rightarrow \frac{\Delta P_{YX}}{\gamma_w} = 0.4 \text{ m} = 40 \text{ cm}$$

تذکر: چون $\frac{\Delta P_{XY}}{\gamma_w} < 0$ به دست آمد، نتیجه می‌شود که بار فشار (ارتفاع ستون آب در پیژومتر) در تراز X-X کمتر از بار فشار در تراز Y-Y است.

۹۸- گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

برای محاسبه دبی عبوری از واحد طول سپر فلزی می‌نویسیم:

$$q = KH \left(\frac{Nf}{Nd} \right) = (7.5 \times 10^{-7}) (3 + 2) \left(\frac{3 \times 2}{9} \right) = 2.5 \times 10^{-6} \frac{m^3}{s}$$

پرسش: چنانچه قبل از انجام عملیات سازه‌ای در ناحیه گودبردای شده، یک لایه رس سیلتی به ضخامت ۱۰۰ mm با ضریب نفوذپذیری $K = 1 \times 10^{-6} \frac{cm}{s}$ در بالا دست رسوب کند، در آن صورت ضریب اطمینان گودبرداری در برابر جوشش چه تغییری می‌کند؟

۹۹- گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

سطح زمین را به‌عنوان سطح مبنا در نظر می‌گیریم و می‌نویسیم:

$$\sigma_A - \sigma'_A = u_A$$

$$u_A = \gamma_w (h_A - Z_A) = 10 \left[7 - 2 \times \left(\frac{6}{6} \right) - (-6.5) \right] = 115 \frac{KN}{m^2}$$

۱۰۰- گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

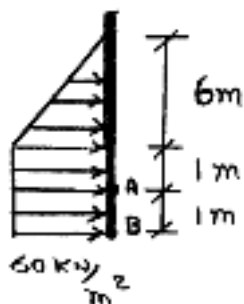
الف) محاسبه فشار آب حفره‌ای در مجاورت سپر، واقع بر اولین خط هم‌پتانسیل:

$$u_A = \gamma_w (h_A - Z_A) = 10 \times \left[6 - 1 \times \left(\frac{6}{6} \right) - (-1) \right] = 60 \frac{KN}{m^2}$$

ب) محاسبه فشار آب حفره‌ای در مجاورت سپر، واقع بر دومین خط هم‌پتانسیل:

$$u_B = \gamma_w (h_B - Z_B) = 10 \times \left[6 - 2 \times \left(\frac{6}{6} \right) - (-2) \right] = 60 \frac{KN}{m^2}$$

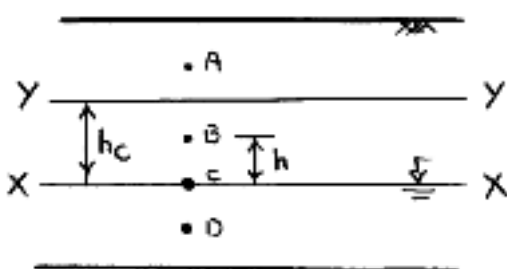
ج) ترسیم نمودار توزیع فشار برای سمت چپ دیوار و محاسبه نیروی وارد بر آن:



$$F = \left(\frac{60 \times 6}{2} \right) (5) + (60 \times 2) (5) = 1500 \text{ KN}$$

۱۰۱- گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

صعود مویینگی در خاک باعث افزایش تنش مؤثر در ناحیه صعود مویینگی، نقاط واقع بر سطح آزاد آب و نیز ناحیه قرار گرفته در زیر سطح آزاد آب می‌شود. مقادیر تنش مؤثر به شرح زیر است:

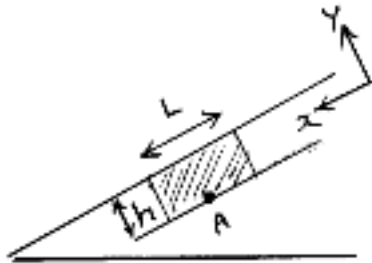


$$\begin{cases} \Delta \sigma'_A = 0 \\ \Delta \sigma'_B = (\gamma_{sat} - \gamma)(h_C - h) + (\gamma_w h) \\ \Delta \sigma'_C = \Delta \sigma'_D = (\gamma_{sat} - \gamma)(h_C) \end{cases}$$

۱۰۲- گزینه ۲ صحیح می باشد

مرحله اول: محاسبه تنش کل در نقطه A

برای محاسبه تنش کل در نقطه A یک قطعه مکعب مستطیلی به طول L و عرض واحد (عمود بر صفحه کاغذ) را مطابق شکل در بالای نقطه A در نظر می گیریم و رابطه تعادل نیروها را برای آن می نویسیم:

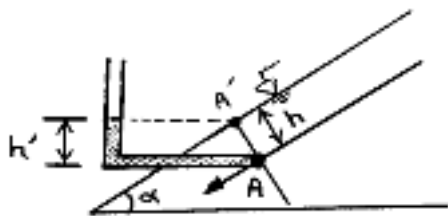


$$\sum F_y = 0 \rightarrow N = w \cos \alpha \rightarrow \frac{N}{A} = \frac{w}{A} \cos \alpha$$

$$\sigma = \frac{\gamma(L \times h \times 1)}{(L \times 1)} \cos \alpha \rightarrow \sigma = \gamma h \cos \alpha$$

مرحله دوم: محاسبه فشار آب حفره‌ای در نقطه A

برای محاسبه فشار آب حفره‌ای در نقطه A داریم:



$$u = \gamma_w h' = \gamma_w h \cos \alpha$$

حال با استفاده از نتایج به دست آمده در دو مرحله قبل خواهیم داشت:

$$\sigma'_A = \sigma_A - u_A = \gamma h \cos \alpha - \gamma_w h \cos \alpha = \gamma' h \cos \alpha$$

$$= (18 - 10)(1)(\cos 30^\circ) = 4\sqrt{3} \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}$$

تذکر: در شکل دوم بر روی یک خط هم پتانسیل قرار دارند، بنابراین بار آبی آن‌ها یکسان است. به همین دلیل سطح آب در بیرومتری که در نقطه A قرار دادیم، با سطح آب در A' یکسان می باشد.

۱۰۳- گزینه ۲ صحیح می باشد

$$\Delta \sigma'_A = \Delta \sigma_A - \Delta u_A = (\gamma_{\text{sat}} - \gamma_d)(h_C) - 0 = (\gamma_{\text{sat}} - \gamma_d) h_C \rightarrow 4 = (19 - 17)(h_C) \rightarrow h_C = 2 \text{ m}$$

تذکر: γ_d و γ_{sat} مربوط به لایه‌ای است که آب در آن صعود موینیگی داشته است. همچنین توجه داریم که فشار آب حفره‌ای در نقطه A به علت عدم تغییر در تراز سطح آب زیرزمینی، ثابت مانده است.

۱۰۴- گزینه ۳ صحیح می باشد

$$\sigma'_A = \sigma_A - u_A = (18 \times 4 + 3 \times 20) - 10 \times \left[4 - 1 \times \left(\frac{6}{4} \right) + 3 \right] = 57 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}$$

۱۰۵- گزینه ۳ صحیح می باشد

در نقطه A فشار نفوذ مخالف صفر است و این بدان معنی است که در این لایه آب در خاک حرکت دارد. اگر فشار آب حفره‌ای نقطه A در حالت سکون را با u_A^* نشان دهیم و P_A فشار نفوذ در نقطه A باشد در آن صورت فشار آب حفره‌ای در وضعیت موجود برابر است با:

$$u_A = u_A^* + P_A = 1.5 \times 10 + 30 = 45 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}$$

۱۰۶- گزینه ۴ صحیح می باشد

فشار تراوش (فشار نفوذ) در مقطع A-A برابر است با:

$$P_{A-A} = iZ\gamma_w$$

در این رابطه Z فاصله تراز A-A تا سطح خاکی است که شیب آبی آن i می باشد. برای ثابت ماندن P_{A-A} ، با توجه به ثابت بودن Z و γ_w بایستی i تغییر نکند. اگر ارتفاع آب در پایین دست از h به ۳h برسد (۳ برابر شود) i تغییری نمی کند زیرا:

$$i_1 = \frac{2h-h}{L} = \frac{h}{L}, \quad i_2 = \frac{3h-2h}{L} = \frac{h}{L} \rightarrow i_1 = i_2$$

اما تفاوتی که این حالت با حالت قبل دارد در آن است که جهت جریان عوض می شود و طبیعتاً جهت فشار تراوش هم عوض می شود (از پایین به بالا خواهد شد) ولی مقدار آن، همان طور که ملاحظه شد، تغییر نمی کند و ثابت است.

پرسش: چنانچه در این مسئله ارتفاع آب در پایین دست ۴ برابر شود، در آن صورت گرادیان هیدرولیکی بحرانی خاک (icr) چه تغییری می کند؟

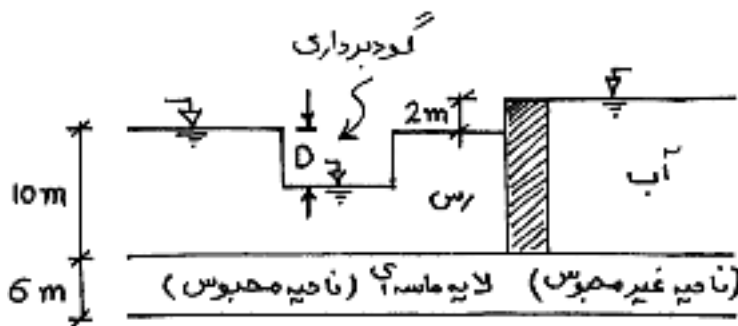
۱۰۷- گزینه ۳ صحیح می باشد

$$\begin{cases} F \text{ (نیروی تراوش)} = iZ\gamma_w A \\ V \text{ (حجم خاک)} = ZA \end{cases} \rightarrow z = \frac{iZ\gamma_w A}{ZA} = i\gamma_w$$

$$\rightarrow z = \left(\frac{\Delta h}{L} \right) \gamma_w = \left(\frac{80-40}{40} \right) \times 10 = 10 \frac{\text{KN}}{\text{m}^3}$$

۱۰۸- گزینه ۳ صحیح می باشد

با توجه به توضیحات ارائه شده در صورت سؤال می توان وضعیت پروفیل خاک را به صورت زیر ترسیم کرد:



$$FS \text{ (بالا زدگی)} = \frac{\sigma}{u} \xrightarrow{F.S=1} \sigma = u \rightarrow (10-D)(20) = (12 \times 10) \rightarrow D = 4m$$

۱۰۹- گزینه ۱ صحیح می باشد

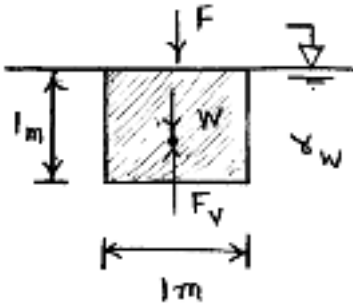
$$F.S = \frac{i}{i_{cr}}, \quad i = \frac{\Delta h}{L} = \frac{66-30}{30} = 1.2, \quad i_{cr} = \frac{G_s - 1}{1 + e} = \frac{2.62 - 1}{1 + 0.8} = 0.9 \rightarrow F.S = \frac{1.2}{0.9} = \frac{4}{3} = 1.33$$

۱۱۰- گزینه ۱ صحیح می باشد

وقتی $i = i_{cr}$ می شود، یعنی $\sigma' = 0$ شده است. در این حالت در خاک های اصطکاکی که چسبندگی ندارد به علت از بین رفتن مقاومت خاک جوشش رخ می دهد ولی در خاک های چسبنده مقاومت صفر نمی شود و جوشش اتفاق نمی افتد. بنابراین در این سؤال احتمال جوشش در خاکی بیشتر است که چسبنده نیست یعنی SP (خاک ماسه بد دانه بندی شده)

۱۱۱- گزینه ۳ صحیح می‌باشد

با ترسیم وضعیت مکعب پس از اعمال نیروی F و غوطه‌ور شدن کامل آن در آب خواهیم داشت:



$$\sum F_y = 0 \rightarrow F + w = F_V \rightarrow 3 + \gamma_S \times 1 = \gamma_w \times 1 \rightarrow \gamma_S = 10 \times 1 - 3 = 7 \frac{\text{KN}}{\text{m}^3}$$

$$S = \frac{\gamma_S}{\gamma_w} = \frac{7}{10} = 0.7$$

۱۱۲- گزینه ۱ صحیح می‌باشد

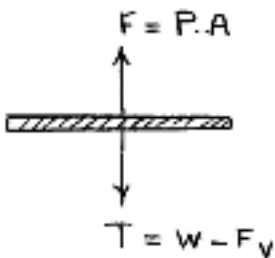
اگر V_d حجم غوطه‌ور در آب مجموعه باشد، در آن صورت با نوشتن رابطه تعادل برای مجموعه چوب (A) و بتن (B) خواهیم داشت:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_V = w = w_A + w_B \rightarrow (\gamma_w)(V_d) = (w_A) + (\gamma_B)(V_B)$$

$$(10) \left(\frac{1}{4} \times 2 \times 1 \times 1 + V_B \right) = (5) + (25)(V_B) \rightarrow V_B = 0.33 \text{ m}^3$$

۱۱۳- گزینه ۲ صحیح می‌باشد

ابتدا دیگرام آزاد ورق مسطح را در آستانه بلند شدن از روی حفره ترسیم می‌کنیم:



حال با نوشتن رابطه تعادل در امتداد قائم و جایگذاری نیروهای فشار، وزن و شناوری خواهیم داشت:

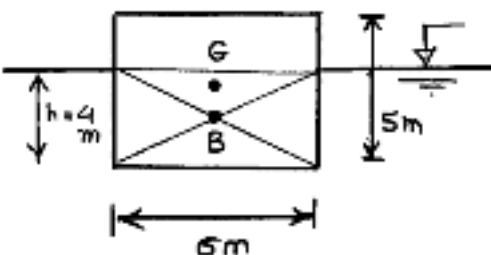
$$\sum F_y = 0 \rightarrow F = w - F_V \rightarrow (p) \left(\frac{\pi \times 0.5^2}{4} \right) = (23.6)(0.06) - (10)(0.06) \xrightarrow{\pi=3} p = 0.32 \times 13.6 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2}$$

در نهایت با نوشتن معادله مانومتری محاسبه فشار (در مانومتر مایل)، به دست می‌آید:

$$p - \gamma_{Hg} \Delta h \sin 30^\circ = 0 \rightarrow \Delta h = \frac{p}{\gamma_{Hg} \sin 30^\circ} = \frac{0.32 \times 13.6}{13.6 \times 10 \times 0.5} = 0.064 \text{ m} = 6.4 \text{ cm}$$

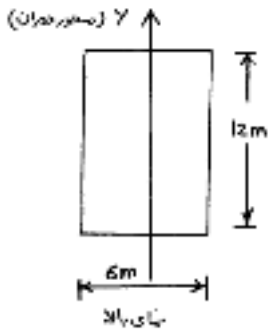
۱۱۴- گزینه ۴ صحیح می‌باشد

مرکز شناوری، مرکز حجم قسمتی از جسم است که درون آب می‌باشد، لذا ابتدا بایستی ببینیم که چه مقدار از جسم درون آب است:



$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_V = w \rightarrow 10 \times h = 8 \times 5 \rightarrow h = 4 \text{ m}$$

بنابراین با توجه به شکل و همگنی جسم نتیجه می‌شود که مرکز شناوری ۰.۵ متر پایین‌تر از مرکز ثقل قرار دارد، یعنی $GB = 0.5m$ است. حال برای تعیین ارتفاع متاسنتریک خواهیم داشت:



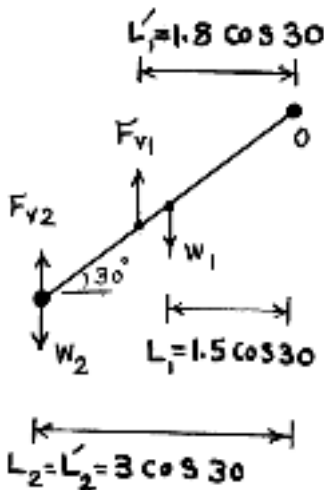
$$MB = \frac{I_y}{V_d} = \frac{\frac{1}{12} \times 12 \times 6^3}{6 \times 6 \times 12} = 0.75$$

$$MG(\text{ارتفاع متاسنتریک}) = MB - GB = 0.75 - 0.5 = 0.25m$$

$MG > 0 \rightarrow$ تعادل پایدار است

۱۱۵- گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

با ترسیم دیاگرام آزاد بازوی چوبی و نوشتن رابطه تعادل لنگرها حول لولای O، خواهیم داشت:



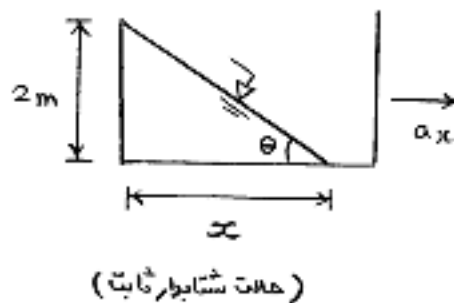
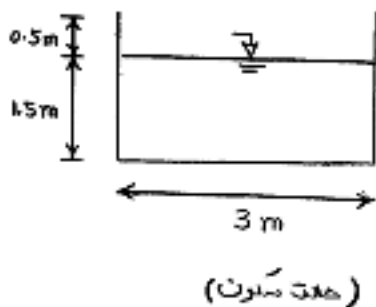
$$\sum M_o = 0 \rightarrow W_1 L_1 + W_2 L_2 = F_{v1} L'_1 + F_{v2} L'_2$$

$$(12)(1.5 \cos 30) + (16 \times V_s)(3 \cos 30) = (10 \times 2.4 \times 0.5)(1.8 \cos 30) + (10 \times V_s)(3 \cos 30)$$

$$\rightarrow V_s = 0.2m^3$$

توجه: طول بازوی چوبی برابر ۳ متر است که با توجه به شکل ملاحظه می‌شود ۲.۴ متر آن در داخل آب و ۰.۶ متر از آن، بیرون آب قرار گرفته است.

۱۱۶- گزینه ۳ صحیح می‌باشد.



اگر حالت سکون را با اندیس (۱) و حالت شتابدار ثابت را با اندیس (۲) نشان دهیم، در آن صورت می‌توان نوشت:

$$\Delta V = V_1 - V_2 = 3 \times 1.5 \times 2 - \frac{x}{2} \times 2 \times 2 = 4 \rightarrow x = 2.5m$$

$$\tan \theta = \frac{a_x}{g} \rightarrow \frac{2}{2.5} = \frac{a_x}{g} \rightarrow a_x = 0.8g$$

پرسش: در این مسئله چنانچه مخزن علاوه بر شتاب افقی $a_x = 0.8g$ با شتاب قائم $a_y = 0.6g$ نیز به سمت بالا حرکت کند، در آن صورت چه حجمی از آب درون آن به بیرون تخلیه می‌شود؟

۱۱۷- گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

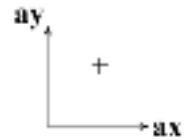
$$\begin{cases} F_H = P_G A \\ P_G = \gamma H_G \left(1 + \frac{a_y}{g}\right) \end{cases} \rightarrow F_H = \gamma H_G \left(1 + \frac{a_y}{g}\right) A = (8)(1) \left(1 - \frac{5}{10}\right) (2 \times 2) = 16 \text{ KN}$$

توجه: H_G فاصله مرکز سطح دیواره تا سطح آزاد مایع است.

۱۱۸- گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

محورهای مختصات X و Y را به گونه‌ای قرار می‌دهیم که محور X ها در امتداد افق باشد. در این حالت a_x و a_y مؤلفه‌های شتاب حرکت مخزن در امتداد محورهای X و Y می‌باشند و θ زاویه سطح آزاد مایع با محور X ها (امتداد افق) است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\tan \theta = \frac{a_x}{a_y + g} = \frac{a \cos \alpha}{a \sin \alpha + g} = \frac{9.8 \times \cos 30^\circ}{9.8 \times \sin 30^\circ + 9.8} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \theta = 30^\circ$$

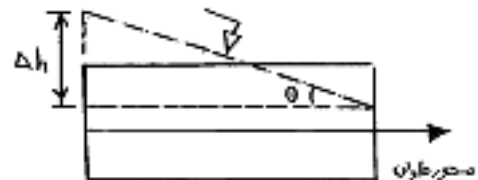


۱۱۹- گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

ابتدا شیب سطح آزاد مایع را وقتی مخزن تحت شتاب ثابت $a_x = 1.5 \frac{m}{s}$ قرار دارد، به دست می‌آوریم و سپس سطح آزاد خیالی (مجازی) را مطابق شکل زیر ترسیم می‌کنیم:

$$\tan \theta = \frac{a_x}{g} = \frac{1.5}{10} = 0.15$$

$$\Delta h = 8 \times \tan \theta = 8 \times 0.15 = 1.2 \text{ m}$$



با توجه به سطح آزاد ترسیم شده، ملاحظه می‌شود که اختلاف فشار بین ابتدا و انتهای مخزن در امتداد محور طولی برابر است با:

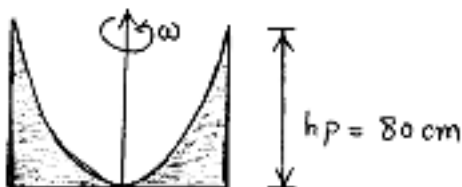
$$\Delta P = S \gamma_w \Delta h = 0.7 \times 10^4 \times 1.2 = 8.4 \text{ kPa}$$

$$\text{تذکر: } \gamma_w = \rho_w g = 1000 \times 10 = 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} = 10 \frac{\text{KN}}{\text{m}^3}$$

پرسش: در این مسئله چنانچه مخزن بر روی یک سطح شیبدار به زاویه $\alpha = 30^\circ$ قرار گیرد و با همین شتاب به سمت پایین حرکت کند، در آن صورت تفاوت نیروی وارد به ابتدا و انتهای آن چقدر خواهد بود؟

۱۲۰- گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

وضعیت سطح آزاد مایع را طبق آنچه در صورت سؤال خواسته شده است، به صورت زیر ترسیم می‌کنیم:

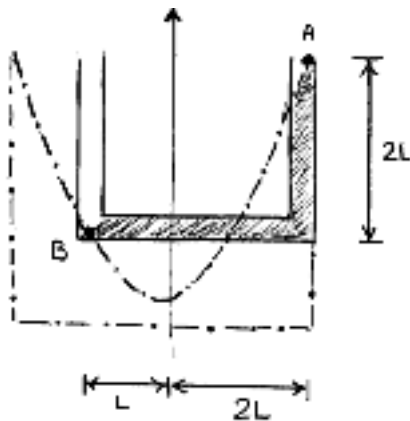


$$h_p = \frac{R \omega^2}{\gamma g} \rightarrow 0.8 = \frac{0.5 \times \omega^2}{\gamma \times 10} \rightarrow \omega = 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

تذکره: در صورت سؤال اشاره شده است که به هنگام دوران مخزن، مرکز سطح آزاد مایع شروع به پایین رفتن می‌کند. این بدان معنی است که دوران ظرف حول محور قائمی است که در مرکز ظرف قرار دارد (وضعیت نشان داده شده در شکل).

۱۲۱- گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

حداکثر مقدار ω به هنگام دوران مجموعه حول محور $X-X$ و با شرط عدم تخلیه مایع به خارج، زمانی رخ می‌دهد که مایع در لوله سمت راست به اندازه L بالا رود. با توجه به یکسان بودن قطر لوله‌ها، مایع در لوله سمت چپ نیز به همین میزان (L) پایین خواهد آمد. با ترسیم سطح آزاد خیالی (مجازی) در این حالت خواهیم داشت:



$$\Delta Y_{AB} = \frac{\omega^2 (r_A^2 - r_B^2)}{\gamma g}$$

$$\rightarrow 2L = \frac{\omega^2 (4L^2 - L^2)}{\gamma g}$$

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\gamma g}{3L}}$$

۱۲۲- گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

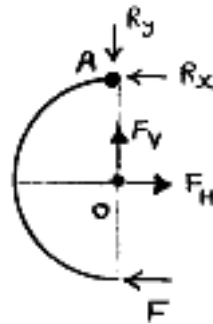
با ترسیم دیاگرام آزاد دريچه نیم‌استوانه‌ای و نوشتن رابطه تعادل لنگرها حول لولا خواهیم داشت:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow F \times 1 = F_H \times 0.5 \rightarrow F = \frac{1}{2} F_H$$

$$F_H = P_G \cdot A = \gamma H_G \left(1 + \frac{a_y}{g} \right) A \rightarrow$$

$$F_H = (10)(1.8) \left(1 + \frac{g}{g} \right) (1 \times 1) = 36 \text{ KN}$$

$$F = \frac{1}{2} F_H = \frac{1}{2} \times 36 = 18 \text{ KN}$$



تذکره: با جایگزینی 0.8 متر آب به جای روغن و محاسبه فاصله مرکز دریچه تا سطح آزاد جدید، به دست آمد:

$$H_G = 0.5 + 0.5 + 0.8 = 1.8 \text{ m}$$

۱۲۳- گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

با نوشتن معادله پیوستگی بین دو مقطع جریان، خواهیم داشت:

$$V_1 A_1 + V_2 A_2 = V_3 A_3 \rightarrow (25) \left(\frac{\pi \times 0.1^2}{4} \right) + (5) \left[\frac{\pi}{4} (0.4^2 - 0.1^2) \right] = (V_3) \left(\frac{\pi \times 0.4^2}{4} \right) \rightarrow V_3 = 6.25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۱۲۴- گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

شرط غیر چرخشی بودن یک جریان آن است که بردار سرعت زاویه‌ای سیال صفر باشد.



$$\omega = \frac{1}{r} \nabla \times V = \cdot \rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \cdot \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial y} \end{cases}$$

که در جریان دو بعدی بایستی داشته باشیم:

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial(r\dot{\theta})}{\partial y} = \frac{\partial(r\dot{\theta}ax)}{\partial x} \rightarrow \dot{\theta} = r\dot{\theta} \rightarrow a = r$$

۱۲۵- گزینه ۴ صحیح می باشد

الف) محاسبه شتاب موضعی (محلی)

$$a = \frac{\partial V}{\partial t} = r\dot{\theta}i - r\dot{\theta}j \xrightarrow{x=y=r} a = r\dot{\theta}i - r\dot{\theta}j \rightarrow |a| = \sqrt{r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\theta}^2} = r\sqrt{2} \frac{m}{s}$$

ب) محاسبه شتاب انتقالی (جابجایی)

$$a = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot V_x + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot V_y = (r\dot{\theta}i)(r\dot{\theta}xt) + (-r\dot{\theta}j)(-r\dot{\theta}yt)$$

$$= r\dot{\theta}xt^2 i + r\dot{\theta}yt^2 j \xrightarrow{t=1} a = r\dot{\theta}^2 i + r\dot{\theta}^2 j \rightarrow |a| = \sqrt{r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\theta}^2} = r\sqrt{2} \frac{m}{s}$$

۱۲۶- گزینه ۱ صحیح می باشد

با استفاده از قانون گاز کامل می نویسیم:

$$G = \rho g Q \rightarrow 4.8 = 2.2(1.0)(Q) \rightarrow Q = 0.15 m^3$$

نی جرمی نی وزنی

$$Q = V \cdot A \rightarrow 0.15 = (1.25) \left(\pi \times \frac{D^2}{4} \right) \xrightarrow{\pi=3} D = 0.4 m = 40 cm$$

۱۲۷- گزینه ۲ صحیح می باشد.

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{\int_A u dA}{A} = \frac{\int_0^r (ry - y^2)(b dy)}{rb} = \frac{\left(ry^2 - \frac{y^3}{3} \right)_0^r}{r} = \frac{r}{3} = 2.67 \frac{cm}{s}$$

توجه: b عرض دو صفحه موازی می باشد.

۱۲۸- گزینه ۴ صحیح می باشد.

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_2 \rightarrow \frac{Q_1}{A_1} = \frac{Q_2}{A_2}, A_1 = A_2 \rightarrow Q_1 = Q_2 \rightarrow \left(\int_A u dA \right)_1 = \left(\int_A u dA \right)_2$$

یعنی حجم پروفیل سرعت در لوله ۲ برابر است با حجم پروفیل در لوله ۱، بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r} \pi R^2 V_{max} = \frac{\pi}{r} (0.8R) \left[(R^2) + \left(\frac{R}{r} \right) + (R) \left(\frac{R}{r} \right) \right] \rightarrow V_{max} = 1.4R$$

۱۲۹- گزینه ۳ صحیح می باشد.

$$Q_2 = V \cdot A = (1.0) \left(\frac{\pi \times 0.08^2}{4} \right) = 0.016\pi = 0.048 m^3 = 48 \frac{Lit}{s}$$



$$\rightarrow q_{m_r} = \rho Q_r = 1000 \times 0.048 = 48 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

فرض می‌کنیم جریان عبوری از مقطع (۳) به مخزن وارد می‌شود و می‌نویسیم:

$$\sum Q_{in} = \sum Q_{out} \rightarrow 30 + Q_r = 48 \rightarrow Q_r = 18 \frac{\text{Lit}}{\text{s}}$$

مقدار Q_r مثبت به دست آمد، پس فرض ما صحیح بوده است. حال مقدار سرعت در مقطع (۳) را به دست می‌آوریم:

$$V_r = \frac{Q_r}{A_r} = \frac{0.018}{\frac{\pi \times 0.04^2}{4}} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

همان‌طور که ملاحظه شد، دبی جرمی در مقطع (۲) برابر $48 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ است و دبی عبوری از مقطع (۳) برابر $18 \frac{\text{Lit}}{\text{s}}$ است یعنی عبارتهای (ب) و

(ج) صحیح می‌باشند ولی عبارت الف صحیح نیست چرا که سرعت ورودی به مقطع (۳) برابر $15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ است نه سرعت خروجی از آن.

۱۳۰- گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

$$V = x^i y^j - y^i x^j, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -V_y, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = +V_x$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = y^i x^j \rightarrow \psi = \frac{1}{j} y^i x^{j+1} + f(y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = V_x \rightarrow y x^j + f'(y) = x^i y \rightarrow f'(y) = 0 \rightarrow f(y) = C \rightarrow \psi = \frac{1}{j} y^i x^{j+1} + C$$